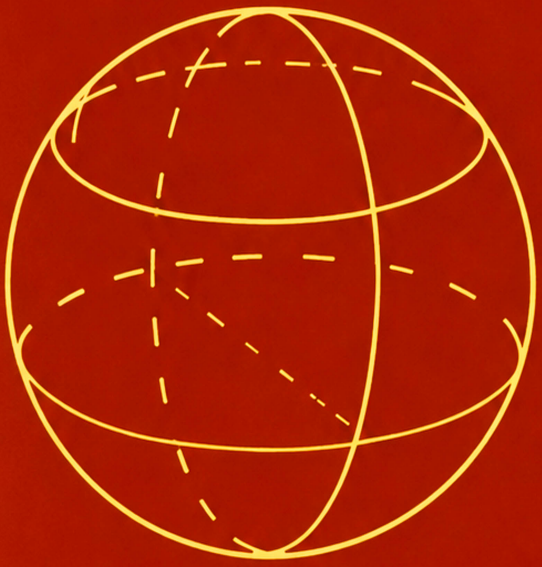
В. Ф. КОВАЛЕВ



ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

~~513~~
К56

УДК 51~~3.1/2, 513.3/4, 514~~.6

Практические занятия по математике для поступающих в вузы. Геометрия и тригонометрия. Ковалев В. Ф., 1971, с. 316.

Книга представляет собой практическое пособие по элементарной математике для поступающих в высшие учебные заведения. Содержание ее полностью соответствует программе средней школы по геометрии и тригонометрии.

Весь материал, включенный в пособие, разбит на отдельные занятия по темам. Каждое занятие содержит в конспективной форме основные теоретические сведения и задачи или упражнения с решениями, наиболее типичные для данной темы. В конце книги имеются задачи и примеры для самостоятельного решения.

Рассчитана на поступающих в вузы, может быть полезна слушателям и преподавателям подготовительных курсов, учащимся старших классов средней школы.

Таблиц — 5, иллюстраций — 250.

2—2—2
149—71

ОГЛАВЛЕНИЕ

Геометрия

Планиметрия

Занятие первое. **Параллельные и перпендикулярные прямые.** Теоретический материал 3
1. Понятие об угле (3). 2. Перпендикуляр и наклонная (4). 3. Параллельные прямые (5). 4. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами (6).
Задачи и решения 7
Занятие второе. **Окружность.** Теоретический материал 11
1. Основные определения (11). 2. Измерение углов дугами окружности (11). 3. Длина окружности и ее дуг (13). 4. Переход от радианного измерения углов к градусному и обратно (13). 5. Взаимное расположение прямой и окружности (14). 6. Построение окружности (16).
Задачи и решения 16
Занятие третье. **Треугольник.** Теоретический материал 22
1. Основные определения (22). 2. Классификация треугольников в зависимости от сравнительной длины их сторон и величины углов (23). 3. Некоторые линии и точки в треугольнике (23). 4. Зависимость между сторонами и углами треугольника (25). 5. Равенство треугольников (25). 6. Подобие треугольников (26).
Задачи и решения 27
Занятие четвертое. **Четырехугольники.** Теоретический материал . . 33
1. Основные определения (33). 2. Параллелограмм (33). 3. Трапеция (35).
Задачи и решения 35
Занятие пятое. **Метрические соотношения в геометрических фигурах.** Теоретический материал 39
1. Некоторые теоремы о пропорциональных линиях (39). 2. Пропорциональные линии в треугольнике (40). 3. Пропорциональные линии в круге (42).
Задачи и решения 43
Занятие шестое. **Геометрическое место точек, задачи на построение** 47
Теоретический материал 47
1. Геометрическое место точек (47). 2. Задачи на построение (48).
Задачи и решения 52
Занятие седьмое. **Правильные многоугольники.** Теоретический материал 58
1. Некоторые свойства многоугольников (58). 2. Вписанные и описанные многоугольники (59). 3. Правильные многоугольники (60).
Задачи и решения 61
Занятие восьмое. **Вычисление площадей плоских фигур.** Теоретический материал 65

1. Площадь (65). 2. Площадь треугольника (66). 3. Площадь четырехугольников (66). 4. Площадь многоугольников (67). 5. Площадь круга и его частей (67). 6. Отношение площадей подобных фигур (68).
Задачи и решения 68
Занятие девятое. **Применение тригонометрии к решению геометрических задач.** Теоретический материал 76
1. Тригонометрические функции острого угла (76). 2. Решение прямоугольных треугольников (78). 3. Решение косоугольных треугольников (79). Теорема синусов (80). Теорема косинусов (80). Теорема тангенсов (80).
Задачи и решения (81) . . . . . .

Стереометрия

Занятие десятое. **Прямая и плоскость в пространстве.** Теоретический материал 87
1. Определение положения плоскости (87). 2. Параллельные прямые и плоскости (87). 3. Параллельные плоскости (87). 4. Параллельные и скрещивающиеся прямые (88). 5. Перпендикуляр и наклонная к плоскости (88). 6. Двугранные углы. Перпендикулярные плоскости (89). 7. Многогранные углы (91)
Задачи и решения 92
Занятие одиннадцатое. **Многогранники.** Теоретический материал 97
1. Общие определения (97). 2. Призма (97). 3. Параллелепипед (97). 4. Пирамида (98).
Задачи и решения 99
Занятие двенадцатое. **Круглые тела.** Теоретический материал . . . 105
1. Цилиндр (105). 2. Конус (106). 3. Шар (107). 4. Поверхности вращения (108).
Задачи и решения 108
Занятие тринадцатое. **Вычисление площади поверхности пространственных фигур.** Теоретический материал 115
1. Поверхности многогранников (115). 2. Поверхности цилиндра и конуса (115). 3. Поверхность шара и его частей (116).
Задачи и решения 116
Занятие четырнадцатое. **Вычисление объемов.** Теоретический материал 128
1. Основные определения (128). 2. Объемы многогранников (128). Объемы цилиндра и конуса (129). 4. Объем шара и его частей (130).
Задачи и решения 131

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Занятие пятнадцатое. **Определение и основные свойства тригонометрических функций.** Теоретический материал 141
1. Обобщение понятия угла (141). 2. Определение тригонометрических функций произвольного угла (142). 3. Основные тригонометрические тождества (144). 4. Знаки тригонометрических функций (145). 5. Значения тригонометрических функций некоторых углов (146). Нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них (147).
Примеры и решения 148

Занятие шестнадцатое. **Тождественные преобразования тригонометрических выражений.** Теоретический материал 154
1. Четность и нечетность тригонометрических функций (154). 2. Теорема сложения (155). 3. Формулы приведения (155). 4. Формулы удвоения и деления аргумента пополам (156). 5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение (157). 6. Некоторые специальные приемы преобразования тригонометрических выражений (158).
Примеры и решения 160
Занятие семнадцатое. **Графики тригонометрических функций.** Теоретический материал 175
1. Некоторые свойства тригонометрических функций (175). 2. Изменение тригонометрических функций (176). 3. Графики тригонометрических функций (178). 4. Некоторые элементарные преобразования графиков тригонометрических функций (179).
Примеры и решения 180
Занятие восемнадцатое. **Решение тригонометрических уравнений и систем уравнений.** Теоретический материал 194
1. Общие замечания (194). 2. Простейшие тригонометрические уравнения (194). 3. Классификация тригонометрических уравнений и их решение (197). 4. Графическое решение тригонометрических уравнений (201). 5. Системы тригонометрических уравнений и их решение (201).
Примеры и решения 205
Занятие девятнадцатое. **Тригонометрические неравенства и их решение.** Теоретический материал 228
1. Простейшие тригонометрические неравенства (228). 2. Общие замечания при решении и доказательстве тригонометрических неравенств (232).
Примеры и решения 232
Занятие двадцатое. **Обратные тригонометрические функции.** Теоретический материал 244
1. Обратные функции (244). 2. Обратные тригонометрические функции (245). 3. Графики обратных тригонометрических функций (247). 4. Зависимости между обратными тригонометрическими функциями и действия над ними (247). 5. Решение простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции (250).
Примеры и решения 250
Задачи и примеры для самостоятельного решения 258

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Геометрия * в первоначальном своем значении понималась как наука о фигурах, о взаимном расположении и размерах их частей, а также о преобразованиях фигур.

Часть геометрии, в которой изучаются свойства фигур, расположенных в одной плоскости, называется планиметрией. Часть геометрии, изучающая свойства фигур, расположенных в пространстве, называется стереометрией.

ЗАНЯТИЕ ПЕРВОЕ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

Теоретический материал

1. Понятие об угле. Углом называется часть плоскости, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки (рис. 1.1). Полупрямые, образующие угол (OA и OB), называются сторонами угла, а точка O, из которой они исходят,— его вершиной.

Если стороны угла составляют прямую линию, то он называется развернутым. Половина развернутого угла называется прямым углом. Угол, больший прямого, называется тупым, а меньший прямого — острым углом.

Полупрямая, исходящая из вершины угла и делящая угол пополам, называется биссектрисой угла.

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие составляют продолжение одна другой, называются смежными. Такими

* Слово геометрия происходит от греческих слов γεω — земля и μετρεω — мерю — дословно означает землемерие.

являются $\angle AOB$ и $\angle BOC$ на рис. 1.2. Очевидно, сумма смежных углов равна двум прямым углам.

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого. Например, углы AOB

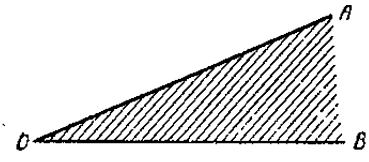


Рис. 1.1.

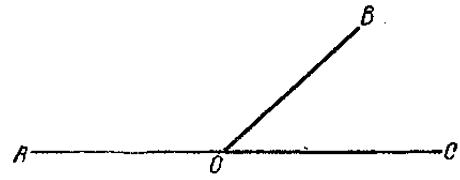


Рис. 1.2.

и COD или углы AOC и BOD на рис. 1.3. Вертикальные углы равны между собой.

2. Перпендикуляр и наклонная. Общая сторона двух неравных смежных углов называется наклонной к прямой, на которой лежат две другие стороны. Общая вершина двух неравных смежных углов называется основанием наклонной.

Общая сторона двух равных смежных углов называется перпендикуляром к прямой, на которой лежат две другие стороны. Их об-

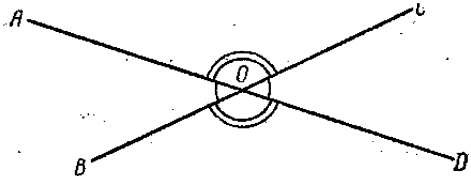


Рис. 1.3.

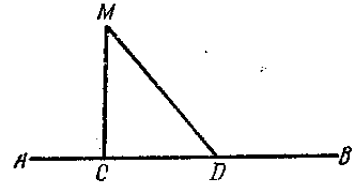


Рис. 1.4.

щая вершина называется основанием перпендикуляра. Две прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются перпендикулярными.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Через всякую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную к данной, и притом только одну.

Отметим некоторые свойства наклонных.

а) Если из данной точки M к одной и той же прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная длиннее перпендикуляра (рис. 1.4).

б) Из двух наклонных, проведенных из одной точки к одной и той же прямой, больше та, основание которой дальше отстоит от

основания перпендикуляра. На рис. 1.5 наклонная MN больше наклонной MD, поскольку проекция наклонной MN (т. е. расстояние от основания наклонной до основания перпендикуляра) больше проекции наклонной MD.

в) Если две различные наклонные, проведенные из одной точки к одной и той же прямой, равны, то их проекции также будут равны.

Справедливы и обратные утверждения, а именно: наклонные с равными проекциями равны между собой; из двух наклонных,

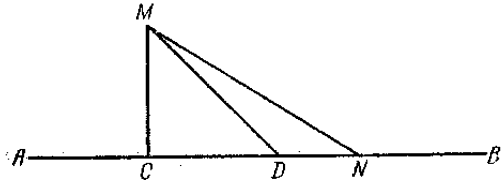


Рис. 1.5.

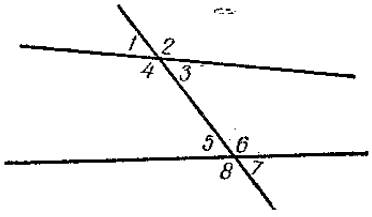


Рис. 1.6.

проведенных к прямой из одной точки, та больше, которая имеет большую проекцию.

Из всего этого следует важный вывод: перпендикуляр, проведенный из точки на прямую, короче всякой наклонной, проведенной из этой же точки на данную прямую.

3. Параллельные прямые. Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки.

Через точку, не лежащую на прямой, нельзя провести двух прямых, параллельных данной прямой.

Это одна из предпосылок, которая в школьной геометрии принимается без доказательства и называется аксиомой о параллельных прямых.

При пересечении двух прямых третьей (рис. 1.6) образуется восемь углов, которые называются так:

а) внутренние накрест лежащие $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$;

б) внешние накрест лежащие $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

в) соответственные $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

г) внутренние односторонние $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$;

д) внешние односторонние $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

С помощью введенных углов можно сформулировать признаки параллельности прямых.

Если при пересечении двух прямых третьей:

а) соответственные углы равны, или

б) внутренние накрест лежащие углы равны, или

в) внешние накрест лежащие углы равны, или

г) односторонние (внутренние или внешние) углы в сумме составляют два прямых, то эти две прямые параллельны.

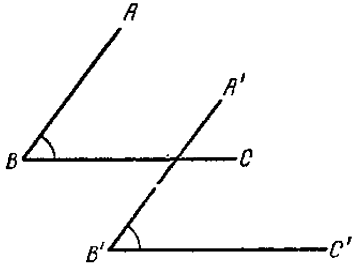


Рис. 1.7.

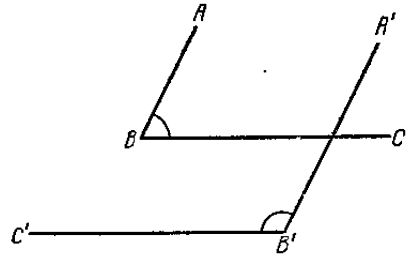


Рис. 1.8.

Справедлива и обратная теорема. Если две прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой выполняются приведенные выше соотношения между углами.

4. Углы с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами. Для углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами справедливы следующие положения.

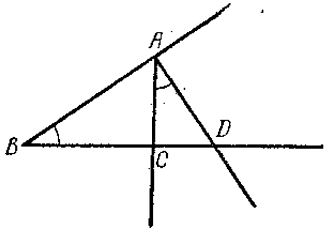


Рис. 1.9.

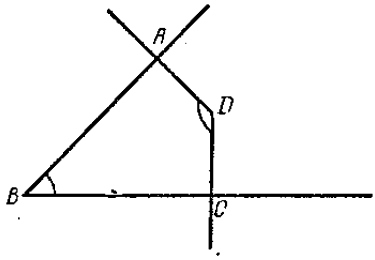


Рис. 1.10.

Углы с соответственно параллельными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые (рис. 1.7).

Углы с соответственно параллельными сторонами в сумме составляют два прямых, если один из них острый, а другой тупой (рис. 1.8).

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые (например, углы ABC и CAD на рис. 1.9).

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами в сумме составляют два прямых, если один из них острый, а другой тупой (например, углы ABC и ADC на рис. 1.10).

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 1.1. Один из смежных углов равен

а) $28°37'$; б) $83°12'43''$.

Чему равен другой?

Р е ш е н и е. Так как смежные углы в сумме составляют $180°$, то:

а) $\alpha = 180° - 28°37' = 151°23'$;

б) $\alpha = 180° - 83°12'43'' = 96°47'17''$.

№ 1.2. Из двух смежных углов

а) один больше другого на $36°$;

б) один меньше другого на $64°$.

Чему равны эти углы?

Р е ш е н и е. Эти задачи сходны с арифметическими задачами на нахождение двух величин, когда известна их разность и сумма.

а) Обозначим искомые углы через α и β. Тогда по условию задачи $\alpha - \beta = 36°$ и по определению смежных углов $\alpha + \beta = 180°$. Решая полученную систему уравнений, находим $\alpha = 108°$, $\beta = 72°$.

б) Для этой задачи приведем арифметическое решение. Обозначим меньший искомый угол через α, больший через β. Если бы оба угла были равны и равнялись меньшему из них, то, очевидно, $\alpha + \beta = 180° - 64°$, т. е. $\alpha + \beta = 116°$ или $2\alpha = 116°$. Откуда $\alpha = 58°$. Но угол β на $64°$ больше. Поэтому $\beta = 58° + 64° = 122°$.

№ 1.3. Найти углы:

а) один смежный угол больше другого в 4 раза;

б) два смежных угла относятся как 2 : 7.

Р е ш е н и е. Эти задачи решаются подобно арифметическим задачам на части.

а) Обозначим меньший угол через α, больший — через β. Пусть α составляет одну часть, тогда β будет составлять 4 части, а в сумме они будут давать 5 частей. На эти 5 частей приходится $180°$, так как α и β смежные углы. На одну часть приходится $\frac{180°}{5} = 36°$. Так как угол α составляет одну часть, то $\alpha = 36°$. Тогда $\beta = 4 \times \alpha = 4 \cdot 36° = 144°$.

б) Пусть α составляет 2 части, а β — 7 частей. Тогда $\alpha + \beta$ составляют 9 частей. На одну часть приходится $\frac{180°}{9} = 20°$. Следовательно,

$$\alpha = 2 \cdot 20° = 40°, \quad \beta = 7 \cdot 20° = 140°.$$

№ 1.4. а) Найти угол между биссектрисами смежных углов, если один из них равен 80°.

б) Доказать в общем случае, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

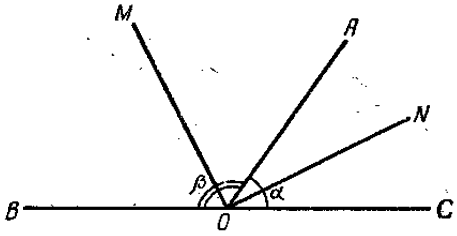


Рис. 1.11.

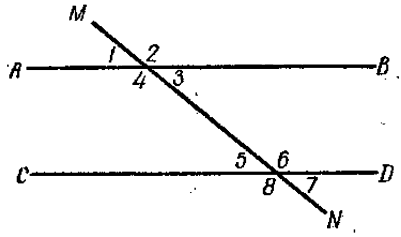


Рис. 1.12.

Р е ш е н и е. а) Если $\alpha = 80°$, то ему смежный угол $\beta = 100°$. Биссектрисы делят углы пополам. Поэтому (рис. 1.11)

$$\angle AON = 40°, \quad \angle MOA = 50°$$

и

$$\angle MON = 40° + 50° = 90°,$$

т. е. угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

б) Обозначим один из смежных углов через α, другой — через β (рис. 1.11). Если провести биссектрисы OM и ON, то $\angle BOM = \angle MOA = \frac{\beta}{2}$, $\angle AON = \angle NOC = \frac{\alpha}{2}$.

Следовательно,

$$\angle BOM + \angle MOA + \angle AON + \angle NOC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$$

или $2 \cdot \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \frac{\beta}{2} = 180°$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$.

Угол между биссектрисами, т. е. угол MON равен

$$\angle MON = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°.$$

Итак, биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

№ 1.5. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Найти все полученные углы, если:

а) внутренние односторонние углы относятся как 3 : 5;

б) один из внутренних односторонних углов больше другого на 54°.

Р е ш е н и е. Так как при пересечении двух параллельных прямых AB и CD (рис. 1.12) третьей прямой MN внутренние односторонние углы $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ в сумме составляют 180°, то:

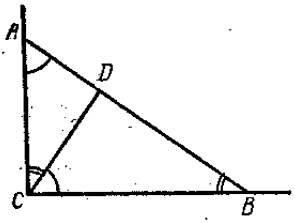


Рис. 1.13.

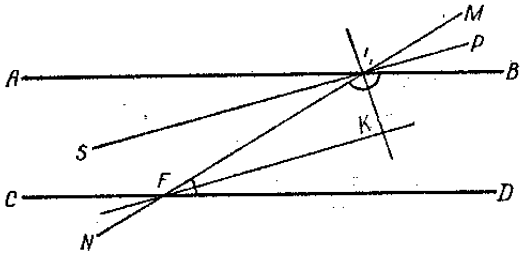


Рис. 1.14.

а) задача решается также как № 1.3 (б). Решая ее, находим $\angle 3 = 67° 30'$, $\angle 6 = 112° 30'$. $\angle 4$ и $\angle 5$ как смежные с ними соответственно равны $\angle 4 = 112° 30'$, $\angle 5 = 67° 30'$. $\angle 1$ будет смежным с $\angle 4$, поэтому $\angle 1 = 67° 30'$. Аналогично находим все остальные углы

$$\angle 2 = 112° 30', \quad \angle 8 = 112° 30', \quad \angle 7 = 67° 30'.$$

б) Задача решается как № 1.2. Решая ее находим $\angle 3 = 63°$, $\angle 6 = 117°$. Аналогично предыдущей задаче находим все остальные углы

$$\angle 1 = \angle 5 = \angle 7 = \angle 3 = 63°,$$
$$\angle 2 = \angle 4 = \angle 8 = \angle 6 = 117°.$$

№ 1.6. Точки A и B, лежащие на сторонах прямого угла, (рис. 1.13) соединены отрезком AB, а из вершины C на AB опущен перпендикуляр CD. Какие углы при этом равны?

Р е ш е н и е. Поскольку $AC \perp BC$, $CD \perp AB$, то

$$\angle CAD = \angle DCB, \quad \angle ACD = \angle CBD,$$

как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. В самом деле, стороны $\angle CAD$ CA и AD перпендикулярны соответственно

сторонам $\angle DCB$ CB и CD, а стороны $\angle ACD$ AC и CD перпендикулярны соответственно сторонам $\angle CBD$ CB и BD.

№ 1.7. Доказать, что при пересечении двух параллельных прямых третьей:

а) биссектрисы внутренних или внешних односторонних углов взаимно перпендикулярны;

б) биссектрисы соответственных или накрестлежащих углов параллельны.

Доказательство. а) Пусть параллельные прямые AB и CD (рис. 1.14) пересекаются третьей прямой MN. Требуется доказать, что $LK \perp FK$, где LK — биссектриса $\angle FLB$, FK — биссектриса $\angle LFD$.

Проведем через точку L прямую $SP \parallel FK$. Нетрудно доказать, что SP будет биссектрисой $\angle MLB$. В самом деле, $\angle MLB = \angle LFD$, как соответственные при параллельных AB и CD. $\angle MLP = \angle LFK$ как соответственные при параллельных SP и FK. Но $\angle LFK = \angle KFD$, так как FK — биссектриса $\angle LFD$. Следовательно, $\angle MLP = \angle PLB$, т. е. SP — биссектриса $\angle MLB$. Тогда $KL \perp SP$ (см. задачу № 1.4), т. е. $\angle KLP = 90°$. Но поскольку $SP \parallel FK$ (по построению), то $\angle KLP + \angle LKF = 180°$ (как внутренние накрестлежащие), т. е. $\angle LKF = 180° - 90° = 90°$.

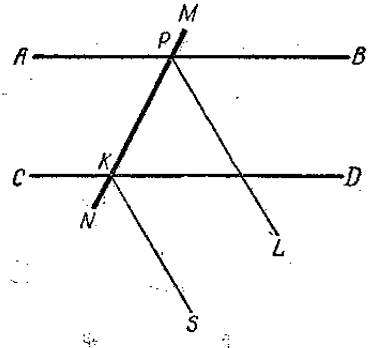


Рис. 1.15.

Следовательно, $LK \perp FK$, ч. т. д.

б) Пусть параллельные прямые AB и CD пересекаются третьей прямой MN, и пусть PL — биссектриса $\angle BPK$, а KS — биссектриса ему соответственного $\angle DKN$. Требуется доказать, что $PL \parallel KS$ (рис. 1.15). $\angle BPK = \angle DKN$, как соответственные при параллельных AB и CD.

$$\angle BPL = \angle LPK, \text{ а } \angle DKS = \angle SKN.$$

Следовательно, $\angle LPK = \angle SKN$ (если целые углы равны, то равны и их половины). Но углы $\angle LPK$ и $\angle SKN$ являются соответственными при прямых PL и KS. Если эти углы равны, следовательно, $PL \parallel KS$.

ЗАНЯТИЕ ВТОРОЕ

ОКРУЖНОСТЬ

Теоретический материал

1. Основные определения. Окружностью называется замкнутая кривая линия на плоскости, все точки которой лежат на одинаковом расстоянии от одной точки, которая называется ее центром. Отрезок прямой OA (рис. 2.1), соединяющий центр с какой-нибудь точкой окружности, называется радиусом. Отрезок прямой CD, соединяющий две точки окружности, называется хордой. Хорда AB, проходящая через центр, называется диаметром. Очевидно, диаметр есть наибольшая из хорд.

Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью и лежащая в ее плоскости, называется касательной. Общая точка прямой и окружности называется точкой касания.

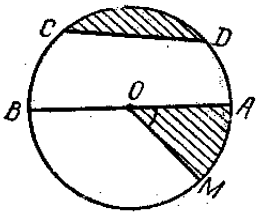


Рис. 2.1.

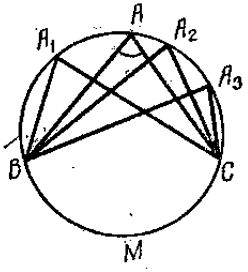


Рис. 2.2.

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом. Часть окружности называется дугой. Часть круга, заключенная между двумя радиусами OA и OM называется сектором. Часть круга, ограниченная хордой CD и дугой, стягиваемой ею, называется сегментом.

2. Измерение углов дугами окружности. Угол AOM, образованный двумя радиусами окружности, называется центральным углом. Говорят, что угол AOM опирается на дугу AM.

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

Для измерения дуг введено понятие дугового градуса. Дуговым градусом называется $\frac{1}{360}$ часть окружности.

Градус в свою очередь делится на 60 равных частей, которые называются минутами, а минута делится на 60 равных частей, которые называются секундами.

Введены следующие обозначения:
для градуса — °, например 18° (18 градусов);
для минуты — ′, 27′ (27 минут);
для секунды — ″, 43″ (43 секунды).

Так, дуга в 18 градусов 27 минут и 43 секунды обозначается $18°27'43''$.

Существует еще радианная система измерения углов. Углом в один радиан называется такой центральный угол, который опирается на дугу окружности, имеющей длину, равную радиусу.

Вписанным углом (рис. 2.2) называется угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки, лежащей на окружности. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, т. е. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BMC$. Очевидно, все вписанные углы

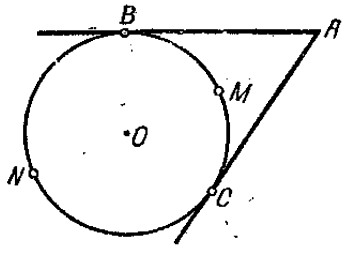


Рис. 2.3.

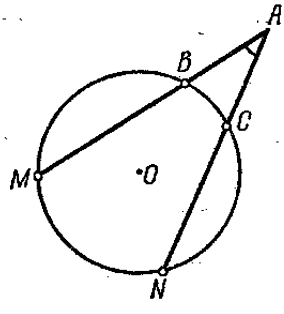


Рис. 2.4.

BA_1C, BA_2C, BA_3C, которые опираются на одну и ту же дугу, равны между собой. В частности, вписанные углы, которые опираются на диаметр, есть прямые углы, поскольку диаметр стягивает дугу, равную полуокружности, т. е. 180°.

Описанным углом (рис. 2.3) называется угол, образованный двумя касательными к окружности. Он измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами, т. е.

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\cup BNC - \cup BMC).$$

Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают окружность (рис. 2.4), измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами, т. е.

$$\angle MAN = \frac{1}{2}(\cup MN - \cup BC).$$

Угол, образованный касательной и хордой (рис. 2.5), измеряется половиной дуги, заключенной внутри его, т. е.

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AMC.$$

Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжением сторон (рис. 2.6), т. е.

$$\angle BMC = \frac{1}{2} (\cup BC + \cup AD).$$

3. Длина окружности и ее дуг. Если измерить длину какой-нибудь окружности и составить отношение длины окружности к ее диаметру, то окажется, что это отношение для любой окружности есть величина постоянная и равна 3,141592... Число, которое пока-

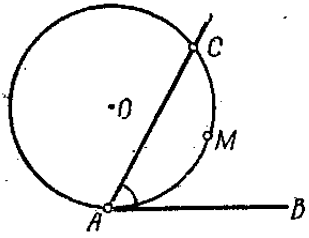


Рис. 2.5.

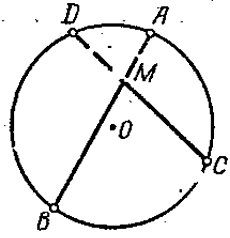


Рис. 2.6.

зывает отношение длины окружности к ее диаметру обозначают греческой буквой π (пи).

Таким образом, если обозначить через C длину окружности, а через R ее радиус, то $\frac{C}{2R} = \pi$. Откуда для вычисления длины окружности получаем формулу

$$C = 2\pi R. \qquad (2.1)$$

Чтобы найти длину дуги величиной в $n°$, нужно сначала найти длину дуги в 1°, для чего длину всей окружности нужно разделить на 360, $\frac{2\pi R}{360}$, а затем полученный результат умножить на число $n°$ градусов дуги, т. е. длина дуги равна

$$l = \frac{2\pi R n^0}{360^\circ}. \qquad (2.2)$$

4. Переход от радианного измерения углов к градусному и обратно. Поскольку радиан — это центральный угол, соответствующий дуге длиной в один радиус, а радиус укладывается на

окружности 2π раз, то полный угол составляет 2π радиана, следовательно, один радиан — это угол, равный

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ\,17'\,44'',$$

а один градус составляет $\frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}0174\ldots$ радиана.

Между градусной и радианной мерой существует прямая пропорциональность, что позволяет легко производить переход от одной меры к другой. Лучше всего это делать путем составления пропорций.

Пусть требуется выразить в радианной мере угол величиной в α°. Рассуждаем так: полному углу, т. е. углу в 360°, соответствует 2π радиан, а углу в α° соответствует x радиан, т. е.

$$360^\circ — 2\pi,$$
$$\alpha^\circ \quad — \quad x.$$

Составляем пропорцию $\frac{360^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{2\pi}{x}$. Откуда находим

$$x = \frac{2\pi\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}. \qquad (2.3)$$

Пусть теперь требуется угол в n радиан выразить в градусной мере. Рассуждая аналогично, находим

$$360^\circ — 2\pi,$$
$$x \quad — \quad n;$$

$$\frac{360^\circ}{x} = \frac{2\pi}{n}; \quad x = \frac{360^\circ \cdot n}{2\pi} = \frac{180^\circ \cdot n}{\pi}. \qquad (2.4)$$

Формулы (2.3) и (2.4) могут служить рабочими формулами при переходе от градусной меры к радианной и обратно.

5. Взаимное расположение прямой и окружности. Возможны три случая взаимного расположения прямой и окружности:

а) прямая не имеет с окружностью ни одной общей точки (рис. 2.7);

б) прямая имеет с окружностью одну общую точку (рис. 2.8);

в) прямая имеет с окружностью две общие точки (рис. 2.9).

В первом случае расстояние от центра до прямой будет больше радиуса; во втором случае это расстояние равно радиусу — прямая будет касательной; в третьем случае прямая называется секущей и расстояние ее от центра будет меньше радиуса.

Имеет место теорема: всякая касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Справедлива и обратная теорема: прямая, перпендикулярная к радиусу окружности в конце его, лежащем на окружности, есть касательная к этой окружности.

Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных, т. е. отрезки касательных, заклю-

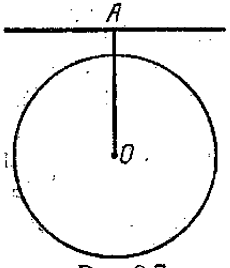


Рис. 2.7.

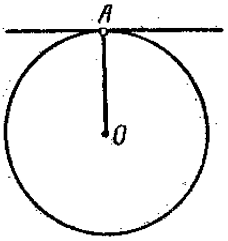


Рис. 2.8.

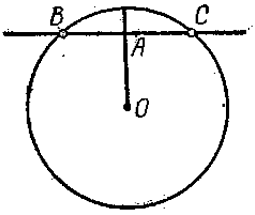


Рис. 2.9.

ченные между точкой, из которой они проведены, и точками касания, равны между собой.

Через точку, лежащую на окружности, можно провести лишь одну касательную. Через точку, лежащую внутри окружности, провести касательную нельзя.

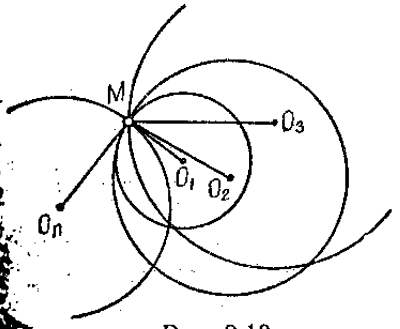


Рис. 2.10.

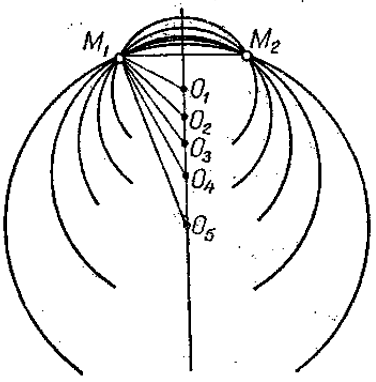


Рис. 2.11.

Очень важна следующая теорема: диаметр, перпендикулярный хорде, делит это хорду и дугу, которую она стягивает, пополам.

Обратная теорема, которая также имеет место, формулируется следующим образом: диаметр, проведенный через середину хорды,

перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам.

6. Построение окружности. Через одну данную точку можно провести бесконечное множество окружностей. Радиусы и центры этих окружностей можно выбирать произвольно (рис. 2. 10).

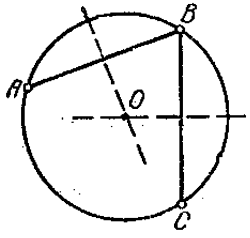


Рис. 2.12.

Через две данные точки можно провести бесконечное множество окружностей. Центры их будут лежать на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка, соединяющего данные точки, а радиусы можно выбирать произвольно (рис. 2.11).

Через три данные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну окружность. Центр ее будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных через середины отрезков, соединяющих любые две пары заданных точек (рис. 2.12), а радиус равен расстоянию от найденного центра до одной из точек.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 2.1. Окружность разделена точками A, B и C на три части в отношении 5 : 6 : 7. Найти:

а) углы, образованные радиусами, проведенными в точки деления;

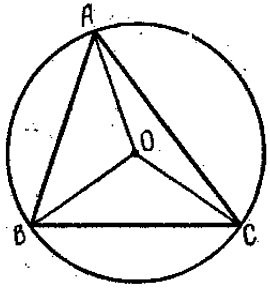


Рис. 2.13.

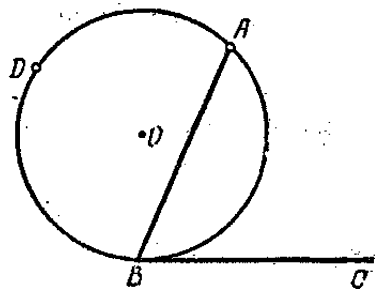


Рис. 2.14.

б) углы, образованные хордами, проведенными через точки деления.

Р е ш е н и е. Пусть $\cup AB : \cup BC : \cup CA = 5 : 6 : 7$, требуется определить углы: $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$, $\angle BOA$, $\angle BOC$, $\angle COA$ (рис. 2.13).

Так как дуга всей окружности содержит всего 360°, то дуги AB, BC и CA содержат соответственно

$$\smile AB = \frac{360}{5+6+7} \cdot 5 = 100°; \quad \smile BC = \frac{360}{5+6+7} \cdot 6 = 120°;$$

$$\smile CA = \frac{360}{5+6+7} \cdot 7 = 140°.$$

Углы BOA, BOC и COA являются центральными углами окружности и измеряются дугами, на которые они опираются, т. е. $\angle BOA = 100°$, $\angle BOC = 120°$, $\angle COA = 140°$.

Углы BAC, CBA и ACB — вписанные углы и измеряются половинами дуг, на которые они опираются. Поэтому

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \smile BC = 60°, \quad \angle CBA = \frac{1}{2} \smile AC = 70°, \quad \angle BCA = \frac{1}{2} \smile BA = 50°.$$

№ 2.2. Найти острый угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, если:

а) хорда делит окружность в отношении 2 : 7;

б) хорда делит окружность на части, из которых одна больше другой на 60°.

Р е ш е н и е. а) Необходимо определить $\angle ABC$ (рис. 2.14), если $\smile AB : \smile ADB = 2 : 7$.

Нетрудно найти (см. предыдущую задачу), что $\smile AB = 80°$, $\smile ADB = 280°$. Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной между ними. Поэтому

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB = 40°.$$

б) Для нахождения $\smile AB$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} \smile ADB + \smile AB = 360°, \\ \smile ADB - \smile AB = 60°. \end{cases}$$

Решая ее, находим $\smile AB = 150°$, $\smile ADB = 210°$. Следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB = 75°$

№ 2.3. Вписанный угол на 28° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Определить эти углы (рис. 2.15).

Р е ш е н и е. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается, а вписанный угол — половиной дуги. Поэтому центральный угол вдвое больше вписанного угла, который опирается на ту же дугу.

Следовательно, $\angle AOC = 56°$, а $\angle ABC = 28°$.

№ 2.4. Угол, вписанный в дугу окружности, равен центральному углу, опирающемуся на ту же дугу. Определить эти углы.

Р е ш е н и е. Обозначим для краткости $\angle ABC$ (рис. 2.16) через α. Тогда, согласно условию задачи, $\angle AOC = \alpha$. Дуга ABC, на которую опирается центральный угол величиной α, равна α. Следовательно,

$$\smile ADC = 360° - \alpha \text{ и } \angle ABC = \frac{1}{2}(360° - \alpha).$$

Но $\angle ABC = \alpha$. Решая уравнение

$$\alpha = \frac{1}{2}(360° - \alpha),$$

находим $\alpha = 120°$. Итак, $\angle ABC = \angle AOC = 120°$.

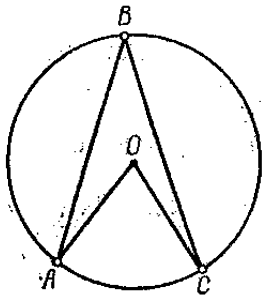


Рис. 2.15.

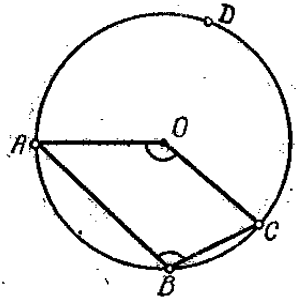


Рис. 2.16.

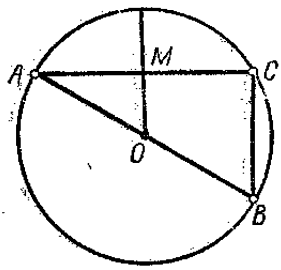


Рис. 2.17.

№ 2.5. Из одной точки окружности проведены две хорды; дуга, стягиваемая одной из них, содержит $n°$, а другая содержит $m°$. Определить угол между хордами.

Р е ш е н и е. Воспользуемся рис. 2.15. Согласно условию задачи $\smile AB = n°$, $\smile BC = m°$. Тогда

$$\smile AC = 360° - (\smile AB + \smile BC) = 360° - (m° + n°)$$

и $\angle ABC = \frac{1}{2}(360° - m° - n°)$, как вписанный угол, опирающийся на дугу AC.

№ 2.6. AB — диаметр окружности (рис. 2.17). CA и CB — хорды. Из центра O через середину M хорды AC проведена прямая OM. Доказать, что $OM \parallel BC$.

Р е ш е н и е. $\angle ACB = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр AB. $OM \perp AC$, как радиус, проведенный через середину

хорды. Следовательно, $\angle BCM = \angle OMA = 90°$. Но эти углы являются соответственными углами при пересечении прямых BC и OM третьей прямой AC. Из равенства этих углов следует, что $OM \parallel BC$.

№ 2.7. AB — диаметр окружности (рис. 2.18). CA и CB — равные хорды. Какие углы образует касательная, проведенная через точку C, с данными хордами?

Р е ш е н и е. $\cup ACB = 180°$ как половина окружности. Из равенства хорд AC и BC следует равенство дуг, стягиваемых ими,

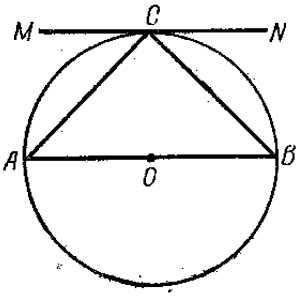


Рис. 2.18.

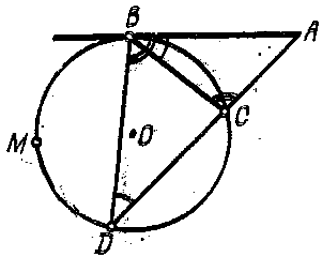


Рис. 2.19.

т. е. $\cup AC = \cup BC$. Но поскольку их сумма равна 180°, то каждая из них равна по 90°.

$\angle NCB = \frac{1}{2} \cup BC$, как угол между хордой и касательной. По той же причине $\angle MCA = \frac{1}{2} \cup AC$. Итак,

$$\angle NCB = \angle MCA = 45°.$$

№ 2.8. Из точки A, взятой вне окружности (рис. 2.19), проведены секущая ACD и касательная AB, а затем проведены хорды BC и BD. Доказать, что углы ΔADB соответственно равны углам ΔACB.

Р е ш е н и е. $\angle BAD$ в этих треугольниках общий. $\angle BDC = \frac{1}{2} \cup BC$, как вписанный угол, опирающийся на $\cup BC$.

$\angle CBA = \frac{1}{2} \cup BC$, как угол между хордой и касательной. Следовательно, $\angle BDC = \angle CBA$.

$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup DCB$, как угол между хордой BD и касательной AB.

$\angle BCD = \frac{1}{2} \cup BMD$, как вписанный угол, опирающийся на $\cup BMD$. Следовательно, $\angle BCA$, как смежный с ним, равен $\cup BCA = \frac{1}{2} \cup DCB$, т. е. $\angle ABD = \angle BCA$.

№ 2.9. Хорды AB и CD (рис. 2.20) пересекаются внутри круга под углом в 35°. Сколько градусов содержит каждая из дуг AC и BD, если их отношение равно $\frac{2}{3}$?

Р е ш е н и е. $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup CA + \cup BD)$, как угол с вершиной внутри круга. Следовательно, $\cup CA + \cup BD = 2\angle AMC =$

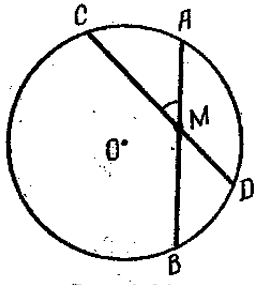


Рис. 2.20.

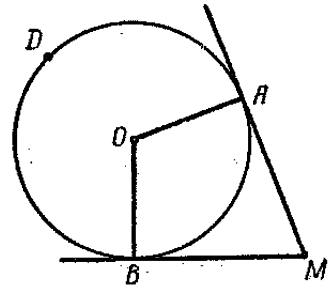


Рис. 2.21.

$= 70°$. Кроме того, согласно условию $\frac{\cup AC}{\cup BD} = \frac{2}{3}$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \cup AC + \cup BD = 70°, \\ \frac{\cup AC}{\cup BD} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

относительно неизвестных $\cup AC$ и $\cup BD$, находим

$$\cup AC = 28°, \quad \cup BD = 42°.$$

№ 2.10. Угол между двумя радиусами равен α. Определить угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов.

Р е ш е н и е. По условию $\angle AOB = \alpha$ (рис. 2.21). $\cup AB = \alpha$, как дуга, на которую опирается центральный угол величиной α. $\cup ADB = 360° - \alpha$. Следовательно, $\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup ADB - \cup AB) = \frac{1}{2}(360° - \alpha - \alpha) = 180° - \alpha$.

№ 2.11. Угол между двумя касательными, исходящими из одной точки, равен 56°. Определить дуги, заключенные между его сторонами.

Р е ш е н и е. Воспользуемся рис. 2.21. Обозначим дугу AB через α. Тогда $\cup ADB = 360° - \alpha$ и $\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup ADB - \cup AB)$, как угол между двумя касательными.

Решая уравнение $56° = \frac{1}{2}(360° - \alpha - \alpha)$, находим $\alpha = 124°$. Следовательно, $\cup AB = 124$, $\cup ADB = 236°$.

№ 2.12. Из точки на окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий середины этих хорд, равен 12. Вычислить радиус окружности.

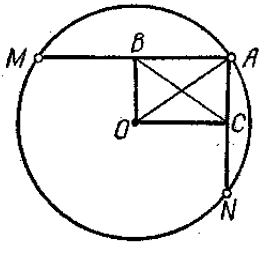


Рис. 2.22.

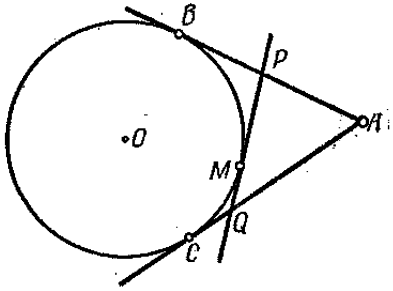


Рис. 2.23.

Р е ш е н и е. (рис. 2.22). Дано: $AB = BM$, $AC = CN$, $AM \perp AN$, $BC = 12$.

Определить OA.

$OB \perp MA$ и $OC \perp AN$, как радиусы, проведенные через середины хорд. Следовательно, четырехугольник $OBAC$ — прямоугольник. У прямоугольника диагонали равны. Следовательно, $OA = BC = 12$.

№ 2.13. Из точки A (рис. 2.23), взятой вне окружности, проведены две касательные AB и AC, длина каждой из них равна a. В какой-либо точке M дуги BC проведена третья касательная, которая пересекает касательные AB и AC в точках P и Q. Доказать, что при перемещении точки M по дуге BC периметр $\triangle APQ$ имеет постоянную величину, равную $2a$.

Р е ш е н и е. Выберем произвольно точку M на дуге BC и проведем через нее касательную PQ. Периметр $\triangle APQ$ обозначим через p. Тогда

$$p = AP + PQ + QA = AP + PM + MQ + QA,$$

но $PM = PB$, а $MQ = QC$, как отрезки касательных, проведенных к одной и той же окружности из одной точки. Следовательно,

$$p = AP + PB + AQ + QC = AB + AC = 2a.$$

Так как точка P выбрана произвольно, то периметр треугольника, отсекаемого касательной, проведенной через любую другую точку дуги BC, будет также равен $2a$.

ЗАНЯТИЕ ТРЕТЬЕ
ТРЕУГОЛЬНИК

Теоретический материал

1. Основные определения. Последовательность отрезков прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что начало следующего совпадает с концом предыдущего, называется ломаной линией. Ломаная линия называется замкнутой, если конец последнего отрезка совпадает с началом первого. Отрезки, образующие ломаную, называются ее сторонами, а вершины углов, заключенные между соседними сторонами, называются вершинами ломаной.

Отрезок прямой, соединяющий две точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти же точки.

Ломаная линия называется выпуклой, если она расположена по одну сторону от каждого отрезка, являющегося его стороной, продолженной неограниченно в обе стороны.

Часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, называется многоугольником. Стороны и вершины этой ломаной называются сторонами и вершинами многоугольника. Углы, составленные двумя смежными сторонами многоугольника, называются углами многоугольника. Сумма длин всех сторон многоугольника называется его периметром. Диагональю многоугольника называется отрезок прямой, соединяющей две несоседние вершины многоугольника.

Многоугольник называется выпуклым, если он ограничен выпуклой ломаной линией.

По числу сторон многоугольник называется треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д.

Наименьшее возможное число сторон многоугольника — три. Многоугольник с тремя сторонами называется треугольником.

2. Классификация треугольников в зависимости от сравнительной длины их сторон и величины углов. Треугольник, у которого все три стороны имеют разную длину, называется разносторонним.

Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным. Сторона равнобедренного треугольника, которая не равна двум другим, обычно называется его основанием, а равные стороны — боковыми.

Треугольник, у которого все три стороны равны, называется равносторонним.

В зависимости от сравнительной величины углов треугольники подразделяются на остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

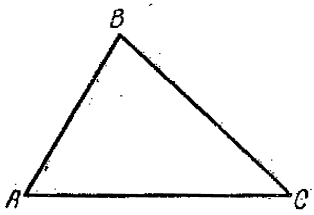


Рис. 3.1.

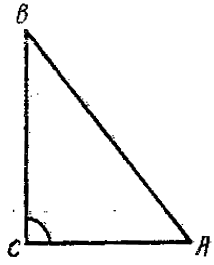


Рис. 3.2.

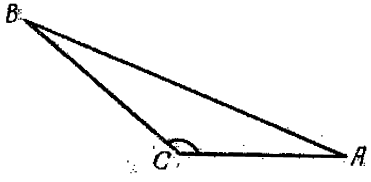


Рис. 3.3.

Треугольник, у которого все углы острые, называется остроугольным ($\triangle ABC$ на рис. 3.1).

Треугольник, у которого один из углов прямой, называется прямоугольным (рис. 3.2). Стороны такого треугольника BC и AC, которые образуют прямой угол, называются катетами, а сторона AB, которая лежит против прямого угла, называется гипотенузой.

Треугольник, у которого есть тупой угол, называется тупоугольным (рис. 3.3).

3. Некоторые линии и точки в треугольнике. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение, заключенный между вершиной и стороной, называется высотой треугольника (отрезок BD на рис. 3.4).

Отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой (BN на рис. 3.4).

Отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между вершиной треугольника и противолежащей стороной, называется биссектрисой треугольника (BM на рис. 3.4).

Очевидно, каждый треугольник имеет три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника (отрезок MN на рис. 3.5).

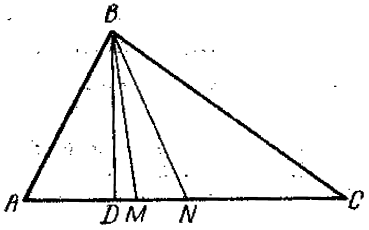


Рис. 3.4.

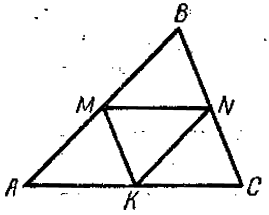


Рис. 3.5.

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине. $B\ \triangle ABC\ MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$.

Очевидно, в треугольнике можно провести три средних линии MN, NK и KM.

Во всяком треугольнике:

а) три высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (рис. 3.6). Эта точка называется ортоцентром;

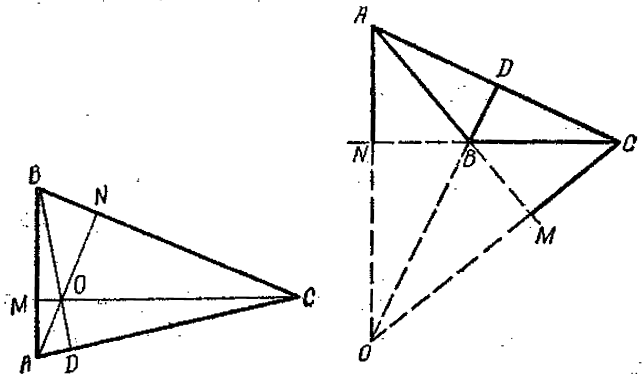


Рис. 3.6.

б) три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром тяжести треугольника и делит каждую медиану в отношении 1 : 2, считая от основания (рис. 3.7). $\triangle ABC\ MO = \frac{1}{2} OC,\ NO = \frac{1}{2} OA,\ DO = \frac{1}{2} OB$;

в) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности *;

г) три перпендикуляра, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной ** около треугольника.

Эти четыре точки называются замечательными точками в треугольнике.

4. Зависимость между сторонами и углами треугольника. Во всяком треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других, но больше их разности.

В одном треугольнике или в равных треугольниках против большей стороны лежит больший угол, против равных сторон лежат равные углы.

Справедливы и обратные утверждения: в одном треугольнике или в равных треугольниках против большего угла лежит большая сторона, против равных углов лежат равные стороны.

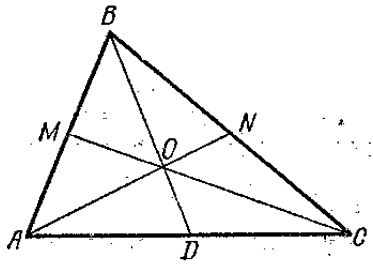


Рис. 3.7.

Очень важным является следующий факт: в любом треугольнике сумма внутренних углов равна двум прямым. Обычно прямой угол обозначают буквой d. Поэтому сумма внутренних углов треугольника равна $2d$.

Как следствие из вышеприведенных теорем вытекают следующие.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из его катетов.

В равностороннем треугольнике все углы равны между собой и равны по 60°.

Внешний угол *** треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

5. Равенство треугольников. Два треугольника называются равными, если при наложении их можно совместить. Чтобы треугольники можно было совместить, необходимо, чтобы они имели соответственно равные элементы. Однако для утверждения, что

---

* Окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются ее.

** Окружность называется описанной около треугольника, если все три вершины треугольника находятся на окружности.

*** Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника.

треугольники равны, нет необходимости проверять равенство всех их элементов. Существуют признаки равенства треугольников.

Два треугольника равны, если:

а) две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника;

б) два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника;

в) три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

Из этих признаков следуют признаки равенства прямоугольных треугольников.

Два прямоугольных треугольника равны, если:

а) два катета одного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника;

б) катет и острый угол одного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого треугольника;

в) гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника;

г) гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника.

6. Подобие треугольников. Подобными называются треугольники, у которых углы попарно равны, а соответствующие стороны пропорциональны. При этом под словом соответствующие понимаются те стороны, которые лежат против равных углов.

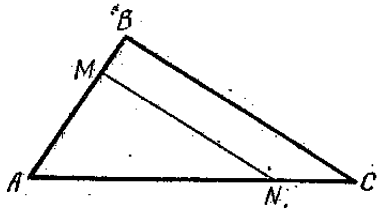


Рис. 3.8.

На существование таких треугольников указывает лемма *: прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Так, если на рис. 3.8 $MN \parallel BC$, то $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ (знаком $\sim$ обозначается подобие треугольников).

Два треугольника, подобны, если:

а) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;

б) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между ними, равны;

* Лемма — вспомогательная теорема.

в) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

Как следствия вытекают следующие признаки.

а) Равносторонние треугольники подобны.

б) Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по одному равному углу.

в) Прямоугольные треугольники подобны, если выполняется одно из следующих условий:

1) острый угол одного равен острому углу другого;

2) катеты одного пропорциональны катетам другого;

3) катет и гипотенуза одного пропорциональны катету и гипотенузе другого.

г) В подобных треугольниках соответствующие стороны пропорциональны соответствующим высотам.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 3.1. Доказать, что в любом треугольнике сумма попарных произведений сторон больше половины суммы их квадратов.

Р е ш е н и е. Во всяком треугольнике любая сторона меньше суммы двух других, но больше их разности. Если обозначить стороны треугольника через a, b и c, то справедливы неравенства

$$a < b + c, \quad a > b - c,$$
$$b < a + c, \quad b > a - c,$$
$$c < a + b, \quad c > a - b.$$

Возведем в квадрат обе части правой группы неравенств

$$a^2 > b^2 - 2bc + c^2,$$
$$b^2 > a^2 - 2ac + c^2,$$
$$c^2 > a^2 - 2ab + b^2.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$a^2 + b^2 + c^2 > 2b^2 + 2a^2 + 2c^2 - 2(bc + ac + ab)$$

или после упрощения —

$$bc + ac + ab > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

№ 3.2. Доказать, что если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.

Р е ш е н и е. Обозначим углы одного треугольника через α, β, γ, а другого — через α_1, β_1, γ_1. Пусть $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$. Требуется доказать, что $\gamma = \gamma_1$. Поскольку сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°, то

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ и } \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ.$$

Приравнивая левые части этих равенств $\alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$ и взаимно уничтожая α и α_1, β и β_1, получим $\gamma = \gamma_1$, что и т. д.

№ 3.3. Доказать, что отрезок любой прямой, заключенный между двумя параллельными прямыми и проходящий через середину

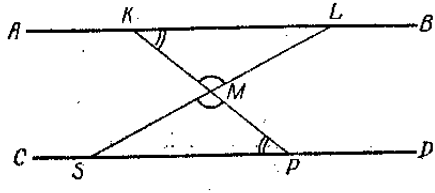


Рис 3.9.

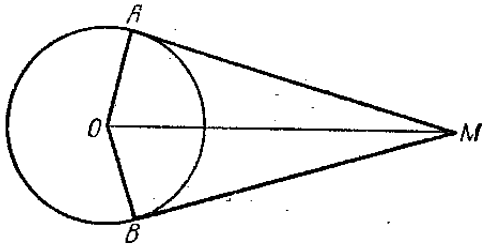


Рис. 3.10.

данного отрезка, заключенного между этими же параллельными прямыми, делится в этой точке пополам.

Р е ш е н и е. Пусть $AB \parallel CD$ (рис. 3.9), $KM = MP$, т. е. точка M — середина отрезка KP. Через точку M проведен произвольный отрезок SL. Требуется доказать, что $SM = ML$.

Рассмотрим $\triangle SMP$ и $\triangle MKL$. У них $KM = MP$ (по условию). $\angle KML = \angle SMP$, как вертикальные, $\angle MKL = \angle MPS$, как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и CD. Следовательно, по второму признаку равенства треугольников $\triangle SMP = \triangle MKL$. Из их равенства следует, что $SM = ML$, что и требовалось доказать. Нетрудно убедиться, что этим свойством обладает отрезок любой прямой, проходящей через точку M.

№ 3.4. Доказать, что отрезки касательных, проведенных к одной и той же окружности из одной и той же точки, между их общей точкой и точками касания равны между собой.

Р е ш е н и е. Рассмотрим $\triangle OAM$ и $\triangle OBM$ (рис. 3.10). Эти треугольники прямоугольные, так как $OA \perp AM$, $OB \perp BM$, как радиусы, проведенные в точку касания, кроме того, гипотенуза OM у них общая, а катеты OA и OB равны, как радиусы окружности. Итак, гипотенуза и катет $\triangle OAM$ соответственно равны гипо-

тенузе и катету $\triangle OBM$. По признаку равенства прямоугольных треугольников $\triangle OAM = \triangle OBM$. Следовательно, $AM = BM$.

№ 3.5. Доказать, что высота, опущенная в равнобедренном треугольнике на основание, является одновременно и медианой и биссектрисой.

Р е ш е н и е. Эта задача также основана на равенстве треугольников. Пусть на рис. 3.11 $AB = AC$ и $AD \perp BC$. Тогда прямоугольные треугольники BAD и ADC равны, поскольку у них $AB = AC$ и $\angle ABD = \angle ACD$, как углы, при основании равнобедрен-

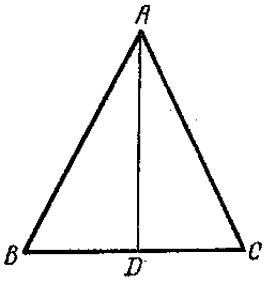


Рис. 3.11.

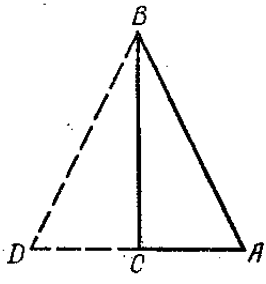


Рис. 3.12.

ного треугольника. Из равенства этих треугольников вытекает, что $BD = CD$ и $\angle BAD = \angle CAD$, т. е. что AD — биссектриса $\angle BAC$ и медиана, проведенная к основанию.

№ 3.6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике, катет, который равен половине гипотенузы, лежит против угла в 30°.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ $BC \perp AC$ и $BA = 2CA$. Требуется доказать, что $\angle ABC = 30°$ (рис. 3.12).

Продолжим сторону AC и отложим на ней отрезок $CD = AC$. $\triangle ABD$ — равносторонний, поскольку в нем $AD = AB$ по построению, $BD = AB$, как две наклонные с равными проекциями. Следовательно, $\angle DBA = 60°$. Но BC — биссектриса $\angle DBA$ (это следует из предыдущей задачи), т. е. $\angle DBC = \angle ABC = 30°$, что и требовалось доказать.

№ 3.7. Доказать, что если в треугольнике проведены две высоты и отрезки их от точки пересечения до вершин равны, то треугольник равнобедренный.

Р е ш е н и е. Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 3.13). $BD \perp AC$, $CK \perp AB$, $OC = OB$. Требуется доказать, что $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Рассмотрим прямоугольные треугольники BKC и BDC. У них BC — общая гипотенуза. $\angle CBD = \angle BCK$, как углы при основании

равнобедренного $\triangle CBO$. Следовательно, $\triangle CBD = \triangle BCK$. Откуда $\angle CBK = \angle BCD$; т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

№ 3.8. Равные отрезки AB и CD (рис. 3.14) пересекаются в точке M, так что $AM = MC$. Доказать, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Р е ш е н и е. Через середину P отрезка CD проведем перпендикуляр к CD. Через середину S отрезка AB проведем перпендикуляр к AB. Точки перпендикуляра, проведенного через середину отрез-

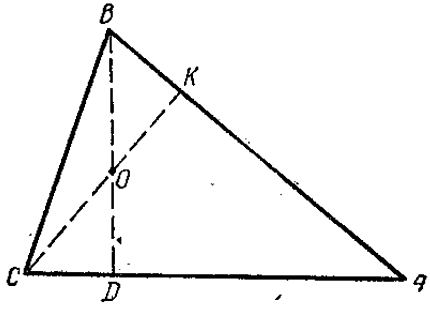


Рис. 3.13.

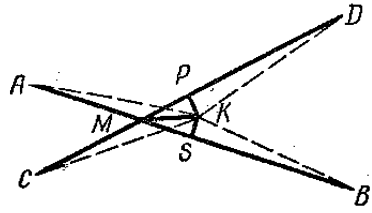


Рис. 3.14.

ка, равноудалены от концов этого отрезка. Поэтому $AK = KB$ и $CK = KD$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники MPK и MSK. У них гипотенуза MK — общая. $MP = CP - CM$, $MS = AS - AM$. Но $AM = CM$ по условию, $AS = CP$, как половины равных отрезков AB и CD. Следовательно, катеты MP и MS равны и $\triangle MPK = \triangle MSK$, как прямоугольные треугольники с соответственно равными гипотенузой и одним катетом. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle PMK = \angle SMK$. Рассмотрим теперь $\triangle AMK$ и $\triangle CMK$. У них $AM = MC$, MK — общая сторона, $\angle AMK = \angle CMK$, как углы, состоящие из равных частей ($\angle AMP = \angle CMS$, $\angle PMK = \angle KMS$). Следовательно, $\triangle AMK = \triangle CMK$, как треугольники с соответственно равными двумя сторонами и углом между ними. Поэтому $AK = CK$, и следовательно,

$$AK = CK = KD = KB.$$

Таким образом, точки A, B, C и D равноудалены от точки K, т. е. они лежат на окружности с центром в точке K.

№ 3.9. Основания трапеции относятся как 5 : 9, а одна из боковых сторон равна 16. На сколько надо ее продолжить, чтобы она пересеклась с продолжением другой стороны?

Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 3.15) $\frac{AB}{DC} = \frac{5}{9}$, $BC = 16$. Определить BK.

Поскольку $AB \parallel CD$, то на основании леммы о подобных треугольниках $\triangle KCD \sim \triangle KBA$. Из их подобия следует, что $\frac{AB}{CD} = \frac{KB}{KC}$. Но $KC = KB + BC = KB + 16$. Поэтому $\frac{5}{9} = \frac{KB}{KB+16}$. Решая это уравнение относительно KB, находим $KB = 20$.

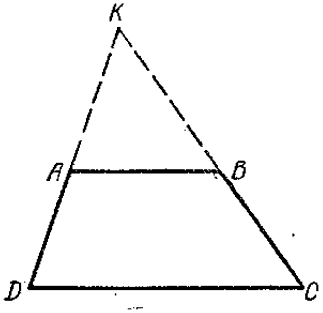


Рис. 3.15.

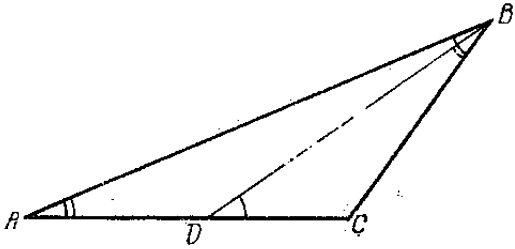


Рис. 3.16.

№ 3.10. В $\triangle ABC$ (рис. 3.16) проведена прямая BD так, что $\angle BDC = \angle ABC$. Точка D делит сторону AC на отрезки, равные a и b. Определить сторону BC.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle ABC = \angle BDC$. $AD = a$, $DC = b$. Рассмотрим треугольники ABC и BDC. У них $\angle BCD$ — общий, $\angle BDC = \angle ABC$ по условию. Следовательно, $\angle BAC = \angle DBC$ и $\triangle ABC \sim \triangle DBC$. Из их подобия следует, что

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD} \text{ или } \frac{a+b}{BC} = \frac{BC}{b}, \quad BC = \sqrt{b(a+b)}.$$

№ 3.11. В равнобедренном треугольнике, периметр которого равен $2p$, между боковыми ребрами проведена средняя линия, длина которой равна a. Определить стороны треугольников.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = AC$ (рис. 3.17) и $AB + AC + BC = 2p$. MN — средняя линия $\triangle ABC$. Поскольку средняя линия параллельна третьей стороне и равна половине ее, то $MN = \frac{1}{2} BC$ и $BC = 2a$.

Тогда

$$AB + AC = 2p - BC = 2p - 2a,$$

$$AB = AC = \frac{2p - 2a}{2} = p - a, \quad AM = \frac{1}{2} AB = \frac{p - a}{2},$$

$$AN = AM = \frac{p - a}{2}.$$

№ 3.12. Доказать, что расстояние центра описанной вокру треугольника окружности от стороны вдвое меньше расстояни ортоцентра от вершины противоположного этой стороне угла

Р е ш е н и е. Пусть точка O — центр описанной вокру $\triangle ABC$ окружности (рис. 3.18). Точка K — ортоцентр, т. е. точк пересечения высот. Требуется доказать, что $KC = 2OM$.

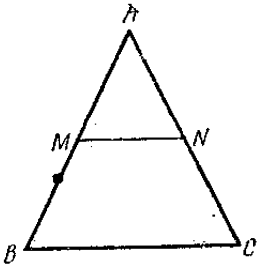


Рис. 3.17.

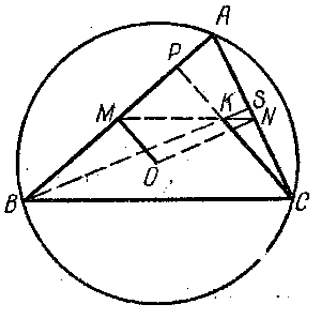


Рис. 3.18.

Рассмотрим $\triangle MON$ и $\triangle BKC$. Центр описанной вокруг тре угольника окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров проведенных через середины двух сторон. Поэтому $OM \perp AB$. Но $CP \perp AB$, как высота, следовательно, $OM \parallel CP$, как два пер пендикуляра к одной и той же прямой. Аналогично доказывается что $ON \parallel BS$. Отрезок MN соединяет середины сторон AB и AC т. е. MN — средняя линия треугольника, а поэтому

$$MN \parallel BC \quad \text{и} \quad MN = \frac{1}{2} BC.$$

Итак, в рассматриваемых треугольниках $\triangle MON$ и $\triangle BK$ стороны попарно параллельны ($MN \parallel BC$, $OM \parallel CK$, $ON \parallel BK$ Следовательно, углы их попарно равны (как углы со взаимно па раллельными сторонами), и треугольники подобны, т. е. $\triangle MON$ $\sim \triangle BKC$. Из их подобия следует

$$\frac{OM}{KC} = \frac{MN}{BC} = \frac{ON}{BK}.$$

Но $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, поэтому $\frac{OM}{KC} = \frac{1}{2}$, откуда $KC = 2OM$, что и требовалось доказать.

ЗАНЯТИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Теоретический материал

1. Основные определения. Четырехугольником называется часть плоскости, ограниченная четырьмя прямыми линиями, или четырехугольник — это многоугольник с четырьмя сторонами (рис. 4.1).

Отрезки, соединяющие противоположные вершины четырехугольника, называются его диагоналями.

Диагональ AC разбивает четырехугольник $ABCD$ на два треугольника ABC и ACD, сумма внутренних углов которых равна

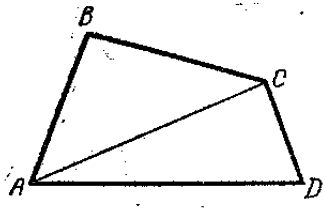


Рис. 4.1.

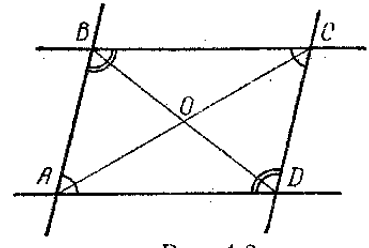


Рис. 4.2.

двум прямым в каждом. Следовательно, сумма внутренних углов четырехугольника равна четырем прямым, т. е. равна $4d$.

В элементарной геометрии ограничиваются изучением двух частных видов четырехугольников: параллелограмма и трапеции.

2. Параллелограмм. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого стороны попарно параллельны. Такой четырехугольник получается, например, при пересечении двух пар параллельных прямых (рис. 4.2).

Свойства сторон и углов параллелограмма выражаются следующей теоремой: во всяком параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны и сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $2d$.

Согласно этой теореме у параллелограмма $ABCD$ (рис. 4.2)

$$AB = CD, \qquad BC = AD,$$

$$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D.$$

Существуют два признака, по которым можно судить является ли четырехугольник параллелограммом.

Если в выпуклом четырехугольнике:

а) каждые противоположные стороны попарно равны между собой, или

б) какие-нибудь пары противоположных сторон равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм.

Во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам, т. е. в параллелограмме $ABCD$ на рис. 4.2. $AO = OC$ и $BO = OD$.

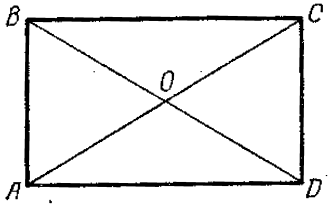


Рис. 4.3.

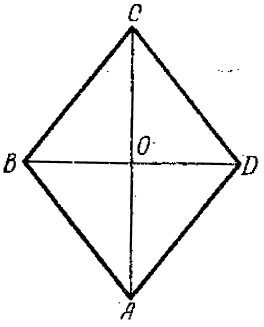


Рис. 4.4.

Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

Частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб и квадрат.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником (рис. 4.3).

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у прямоугольника диагонали равны между собой, т. е. $BD = AC$.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом (рис. 4.4).

Помимо свойств параллелограмма ромб обладает еще следующими свойствами.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам, т. е. $BD \perp AC$, $\angle BCO = \angle DCO$, $\angle CBO = \angle ABO$ и т. д.

Квадратом называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые. Можно еще сказать, что квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны, или это — ромб, у которого все углы прямые (рис. 4.5).

Квадрату присущи все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба.

3. Трапеция. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется трапецией (рис. 4.6). Параллельные стороны трапеции BC и AD называются ее основаниями, а непараллельные AB и CD — боковыми сторонами.

Если боковые стороны равны, трапеция называется равнобочной.

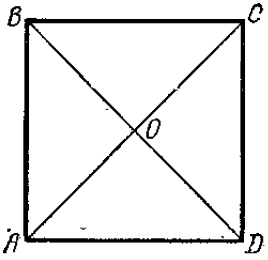


Рис. 4.5.

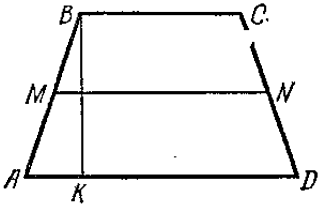


Рис. 4.6.

В равнобочной трапеции углы при основании равны, а также ... ее диагонали.

...апеция называется прямоугольной, если один из ее углов — ...ой.

...резок прямой MN, соединяющий середины боковых сторон, ...ется средней линией трапеции. Средняя линия трапеции па... основаниям и равна их полусумме, т. е.

$$MN \parallel BC \parallel AD \text{ и } MN = \frac{BC + AD}{2}.$$

...стояние BK между основаниями трапеции называется ее высо-

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

... Доказать, что середины сторон произвольного четырех... служат вершинами параллелограмма (рис. 4.7).

... Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. ... доказать, что $MNKL$ — параллелограмм.

...шим задачу, если докажем, что $NK \parallel ML$ и $NK = ML$. ...проведем диагональ BD. В $\triangle BCD$ отрезок NK соединяет ...сторон BC и CD, т. е. NK — средняя линия $\triangle BCD$, ... $NK \parallel BD$ и $NK = \frac{1}{2} BD$. Аналогично можно показать,

что $ML \parallel BD$ и $ML = \frac{1}{2}BD$. Таким образом, $NK \parallel ML$, как две прямые параллельные третьей прямой и $NK = ML = \frac{1}{2}BD$. А это и есть один из признаков параллелограмма, когда две стороны равны и параллельны, т. е. $MNKL$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

Можно было бы воспользоваться вторым признаком параллелограмма, т. е. показать, что $NK \parallel ML$ и $MN \parallel LK$.

№ 4.2. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 4.8) на сторонах AB и CD отложены отрезки $AM = CK$, а на сторонах AD и BC отложе-

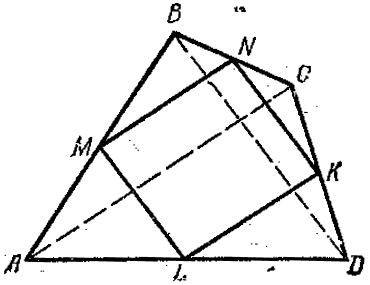


Рис. 4.7.

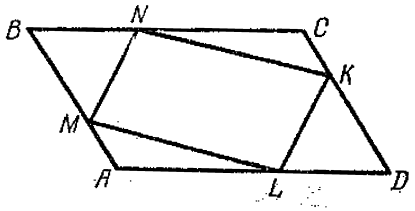


Рис. 4.8.

ны отрезки $DL = BN$. Доказать, что четырехугольник $MNKL$ — параллелограмм.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольники NKC и AML. У них $AM = CK$ по условию. $CN = AL$, так как $BC = AD$ и $BN = DL$. $\angle NCK = \angle MAL$.

Следовательно, $\triangle NKC = \triangle AML$ и $NK = ML$.

Аналогично доказываем, что $MN = KL$. Таким образом, в четырехугольнике $MNKL$ противоположные стороны попарно равны, т. е. $MNKL$ — параллелограмм.

№ 4.3. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки a и b. Определить периметр параллелограмма.

Р е ш е н и е. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 4.9)

$$\angle ABK = \angle KBC, \quad AK = a, \quad KD = b.$$

Требуется определить периметр параллелограмма.

$\angle CBK = \angle BKA$, как внутренние накрест лежащие при параллельных BC и AD. Следовательно, $\angle BKA = \angle ABK$, т. е. $\triangle ABK$ — равнобедренный и $AB = AK = a$.

Таким образом, $AB + BC + CD + DA = a + a + b + a + a + b = 4a + 2b$.

№ 4.4. Высота ромба составляет восьмую часть его периметра. Определить углы ромба.

Р е ш е н и е. Если обозначить периметр ромба через p, то сторона его будет равна $\frac{p}{4}$. В прямоугольном треугольнике ABK $AB = \frac{p}{4}$, $BK = \frac{p}{8}$, т. е. $BK = \frac{1}{2} AB$ (рис. 4.10). Катет BK равен половине гипотенузы AB, а поэтому он лежит против угла в 30°. Итак, $\angle A = \angle C = 30°$,

$$\angle B = \angle D = 150°.$$

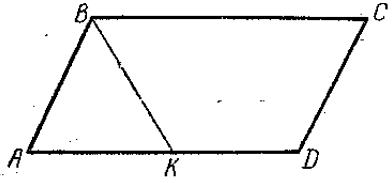


Рис. 4.9.

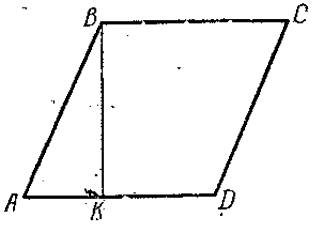


Рис. 4.10.

№ 4.5. Боковая сторона равнобочной трапеции равна 5 *см*, а средняя линия — 7 *см*. Чему равен периметр?

Р е ш е н и е. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Поэтому сумма оснований данной трапеции равна 14 *см*, сумма боковых сторон равна 10 *см*, поскольку трапеция равнобочная. Итак, периметр равен $p = 14$ *см* $+ 10$ *см* $= 24$ *см*.

№ 4.6. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобочная.

Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ $BD = AC$ (рис. 4.11). Требуется доказать, что $AB = CD$.

Проведем через C прямую $CM \parallel BD$. Четырехугольник $BCMD$ — параллелограмм, поэтому $CM = BD$. Но $BD = AC$, и следовательно, $AC = CM$, т. е. $\triangle ACM$ — равнобедренный и $\angle CAD = \angle CMD$. Но $\angle CMD = \angle BDA$, как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\angle CAD = \angle BDA$.

Рассмотрим теперь треугольники ABD и ACD. У них AD — общая сторона, $AC = BD$ по условию. $\angle CAD = \angle BDA$, как доказано выше. Поэтому $\triangle ACD = \triangle BDA$. Откуда следует, что $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ равнобочная.

Заметим, из решения этой задачи видно, что трапеция, диагонали которой образуют с основанием равные углы, равно-

№ 4.7. В трапеции $ABCD$ (рис. 4.11) диагональ AC делит угол BAD при основании пополам. Доказать, что боковая сторона AB равна меньшему основанию BC.

Р е ш е н и е. $\angle BAC = \angle CAD$ по условию. $\angle BCA = \angle CAD$, как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых. Поэтому $\angle BCA = \angle BAC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный и $AB = BC$.

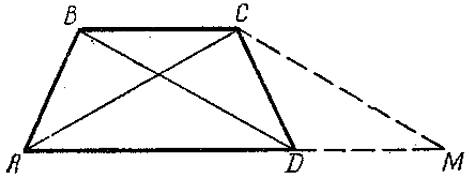


Рис. 4.11.

№ 4.8. В ромбе $ABCD$ (рис. 4.12) на сторонах DA и DC отложены равные отрезки DM и DN. Доказать, что $\triangle BMN$ — равнобедренный.

Р е ш е н и е. В ромбе $ABCD$ $DM = DN$. Требуется доказать, что $BM = BN$.

$\triangle DMN$ — равнобедренный по условию, следовательно, $\angle NMD = \angle MND$. Рассмотрим $\triangle AMB$ и $\triangle NBC$. У них $AB = BC$, $AM = NC$ (т. к. $AM = AD - MD$, $NC = CD - DN$, но $AD = DC$ и $MD = ND$), $\angle MAB = \angle BCN$. Следовательно, $\triangle ABM = \triangle CBN$ и $BM = BN$. Поэтому $\triangle MBN$ — равнобедренный.

№ 4.9. Через вершины сторон треугольника проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Доказать, что образованный этими прямыми треугольник в четыре раза больше данного и что каждая сторона его вдвое больше соответствующей стороны данного треугольника.

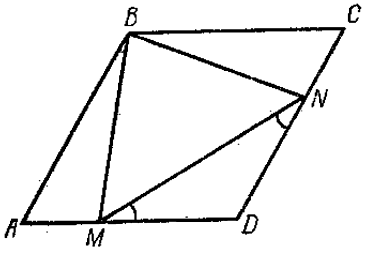


Рис. 4.12.

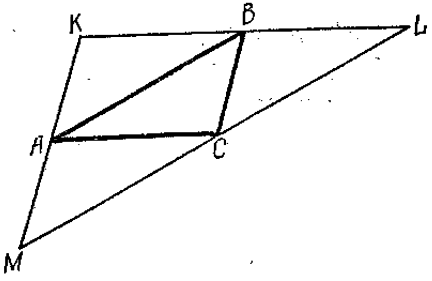


Рис. 4.13.

Р е ш е н и е. Пусть $ML \parallel AB$, $KM \parallel BC$ и $KL \parallel AC$ (рис. 4.13). Четырехугольник $ABLC$ — параллелограмм, поэтому $AC = BL$. Четырехугольник $AKBC$ тоже параллелограмм, поэтому $AC = KB$. Следовательно, $KB = BL$.

Поскольку $BC \parallel KM$ и проходит через середину стороны KL, то BC — средняя линия $\triangle MKL$, и поэтому $KM = 2BC$. Аналогично доказываем, что $ML = 2AB$, $KL = 2AC$.

Нетрудно доказать, что $\triangle ABK = \triangle AMC = \triangle BLC = \triangle ABC$. В самом деле, $\triangle ABK = \triangle ABC$, как половина параллелограмма $ACBK$, $\triangle MAC = \triangle ABC$, как половина параллелограмма $MABC$, а $\triangle BLC = \triangle ABC$, как половина параллелограмма $ABLC$. Следовательно, $\triangle MKL$ вчетверо больше $\triangle ABC$.

ЗАНЯТИЕ ПЯТОЕ

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

Теоретический материал

1. Некоторые теоремы о пропорциональных линиях. Стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими

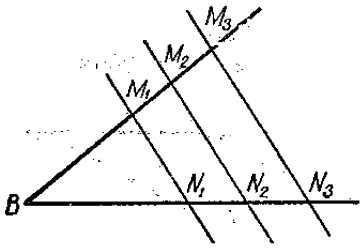


Рис 5.1.

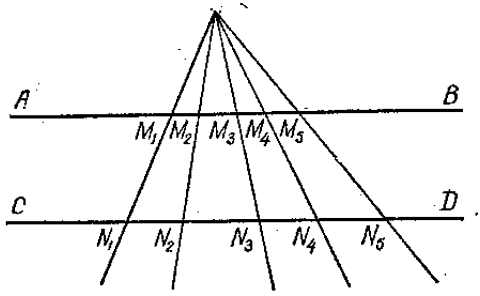


Рис. 5.2.

на пропорциональные части, т. е. (см. рис. 5.1), если $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3 \ldots$,
то

$$\frac{BM_1}{BN_1} = \frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \frac{M_2M_3}{N_2N_3} = \ldots$$

Частным случаем вышеприведенной теоремы является следующая: если на стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то на этой стороне отложатся равные между собой отрезки, т. е. если $BN_1 = N_1N_2 = N_2N_3$ и $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3$, то $BM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$.

Две параллельные прямые, пересекаемые рядом прямых, исходящих из одной точки, рассекаются на пропорциональные части (рис. 5.2), т. е., если $AB \parallel CD$, то

$$\frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \frac{M_2M_3}{N_2N_3} = \frac{M_3M_4}{N_3N_4} = \frac{M_4M_5}{N_4N_5} = \ldots$$

2. **Пропорциональные линии в треугольнике.** Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

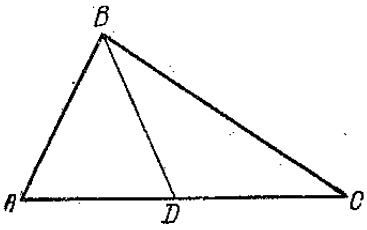


Рис. 5.3.

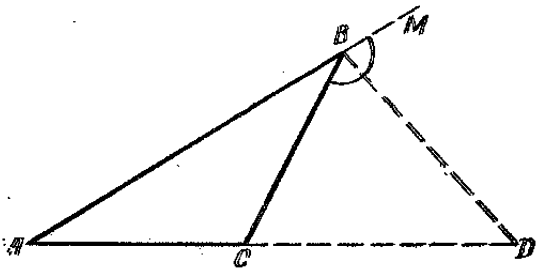


Рис. 5.4.

Если в треугольнике ABC на рис. 5.3 $\angle ABD = \angle DBC$, т. е. BD — биссектриса угла B, то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в такой точке, расстояния кото-

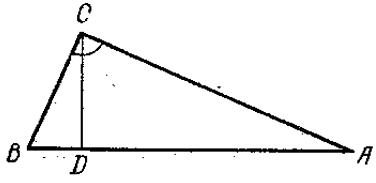


Рис. 5.5.

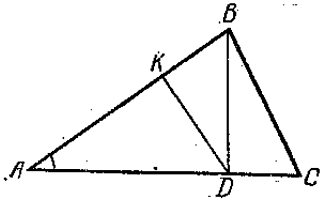


Рис. 5.6.

рой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника (рис. 5.4). Если BD — биссектриса $\angle MBC$, то

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}.$$

прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный шины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между двумя отрезками, на которые он рассе-

кает гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 5.5) согласно вышеприведенной теоремы выполняются следующие соотношения:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{DA}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}.$$

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т. е.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

Эта теорема известна как теорема Пифагора.

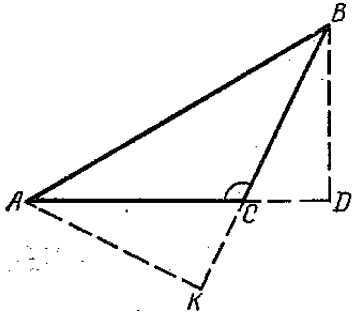


Рис. 5.7.

Во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащий против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее от вершины острого угла до высоты, т. е. (рис. 5.6)

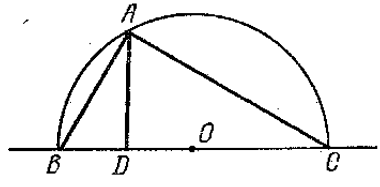


Рис. 5.8.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD,$$

или

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AK.$$

В тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащий против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон плюс удвоенное произведение какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее продолжения от вершины тупого угла до высоты. Так, в треугольнике на рис. 5.7

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \cdot CD,$$

или

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CK.$$

С помощью вышеприведенных теорем легко доказывается следующая: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

3. Пропорциональные линии в круге. Перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками диаметра, а хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная величина между диаметром и прилежащим к хорде отрезком его, т. е., если (рис. 5.8) $AD \perp BC$, то

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \text{ и } \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Если через точку, взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда и диаметр, то произведение отрезков хорды равно

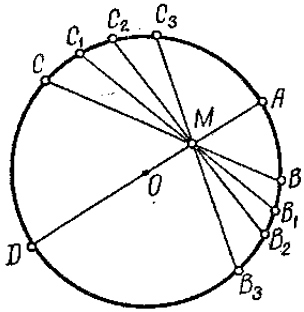


Рис. 5.9.

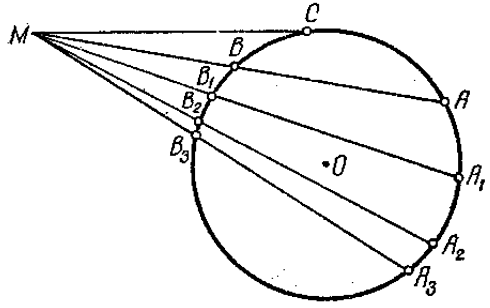


Рис. 5.10.

произведению отрезков диаметра, т. е. $CM \cdot MB = DM \cdot MA$ (рис. 5.9).

Как следствие из вышеприведенной теоремы вытекает следующее: если через точку M, взятую внутри круга, проведено несколько хорд (C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3), то произведение отрезков каждой хорды есть величина постоянная для всех хорд и равна произведению отрезков диаметра (рис. 5.9)

$$C_1M \cdot MB_1 = C_2M \cdot MB_2 = C_3M \cdot MB_3 = \cdots$$

Если из точки, расположенной вне окружности, проведены к этой окружности касательная и секущая, то произведение отрезков секущей, заключенных между данной точкой и точками пересечения секущей с окружностью, равно квадрату отрезка касательной, заключенной между данной точкой и точкой касания (рис. 5.10), т. е.

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

Следствие. Если из точки, расположенной вне окружности, проведено к этой окружности несколько секущих, то произведение

отрезков каждой секущей, заключенных между данной точкой и точками пересечения секущей с окружностью, есть величина постоянная для всех секущих, т. е.

$$MB \cdot MA = MB_1 \cdot MA_1 = MB_2 \cdot MA_2 = \ldots = MC^2.$$

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 5.1. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найти длину высоты, опущенной из вершины прямого угла.

Р е ш е н и е. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 5.11) $BC = a$, $AC = b$. $CD \perp AB$. Требуется определить CD.

По теореме Пифагора

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = a^2 + b^2,$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

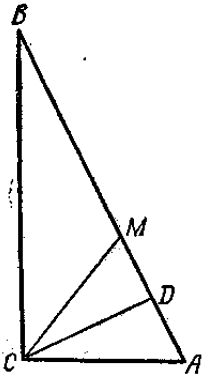


Рис. 5.11.

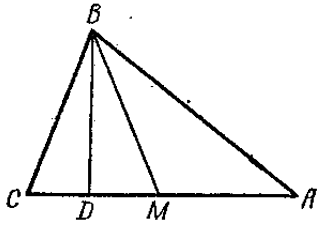


Рис. 5.12.

Катет BC есть среднее пропорциональное между гипотенузой AB и отрезком BD, т. е.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{a}{BD}, \text{ откуда } BD = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$AD = AB - BD = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Высота CD есть среднее пропорциональное между отрезками BD и AD, т. е.

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}, \text{ откуда } CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

№ 5.2. Основание треугольника равно 15. Высота и медиана, проведенные к этому основанию, соответственно равны 11,2 и $0{,}5\sqrt{505}$. Определить другие стороны треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 5.12) $BD \perp AC$, $CM = MA$, $AC = 15$, $BD = 11{,}2$, $BM = 0{,}5\sqrt{505}$.

Определить BC и AB.

Из прямоугольного $\triangle DBM$ по теореме Пифагора

$$MD^2 = BM^2 - BD^2 = \left(\frac{\sqrt{505}}{2}\right)^2 - \left(\frac{112}{10}\right)^2 = \frac{81}{100},$$

т. е. $MD = 0{,}9$.

$$CM = \frac{1}{2}AC = 7{,}5.$$

Поэтому $CD = MC - MD = 7{,}5 - 0{,}9 = 6{,}6$. $AD = 8{,}4$.

Из прямоугольного треугольника BCD находим

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = \left(\frac{112}{10}\right)^2 + \left(\frac{66}{10}\right)^2 = \frac{16\,900}{100} = 169, \quad BC = 13.$$

Из прямоугольного треугольника BDA —

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = \left(\frac{112}{10}\right)^2 + \left(\frac{84}{10}\right)^2 = \frac{19\,600}{100} = 196, \quad AB = 14.$$

№ 5.3. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение оснований.

Р е ш е н и е. Требуется доказать, что в трапеции $ABCD$ (рис. 5.13)

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC.$$

Из $\triangle ACD$ на основании теоремы о квадрате стороны, лежащей в треугольнике против острого угла, имеем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DN.$$

Из $\triangle ABD$ на основании той же теоремы —

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AM.$$

Складывая эти два равенства, получим

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 + AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot DN - 2AD \cdot AM$$

или

$$AC^2 + BD^2 = CD^2 + AB^2 + 2AD^2 - 2AD(DN + AM).$$

$$AC^2 + BD^2 = CD^2 + AB^2 + 2AD[AD - (DN + AM)],$$

$$DN + AM = AD - MN = AD - BC,$$

поэтому

$$AC^2 + BD^2 = CD^2 + AB^2 + 2AD\,[AD - AD + BC) =$$
$$= CD^2 + AB^2 + 2AD \cdot BC,$$

что и требовалось доказать.

№ 5.4. Доказать, что в любом треугольнике со сторонами a, b, c

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

где m_a — медиана, проведенная к стороне a.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 5.14) $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$, $MC = MB$.

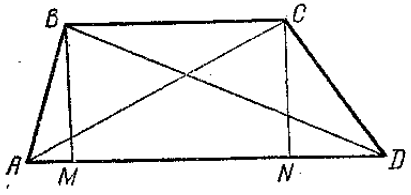


Рис. 5.13.

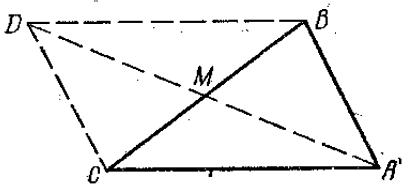


Рис. 5.14.

Продолжим медиану AM и на ее продолжении отложим отрезок $MD = MA$. Соединим точку D с вершинами треугольника C и B. Четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, поскольку диагонали BC и AD в точке пересечения M делятся пополам. В параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов его диагоналей. Поэтому

$$CD^2 + BD^2 + AB^2 + AC^2 = BC^2 + AD^2.$$

Но $CD = AB = b$, $BD = AC = c$, $AD = 2AM = 2m_a$. Следовательно

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4m_a^2$$

или

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

что и требовалось доказать.

№ 5.5. В круг радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты и основания равна диаметру круга. Определить высоту треугольника.

Р е ш е н и е. В $\triangle ABC$ (рис. 5.15) $AB = AC$, $AD \perp BC$. Поскольку $AD \perp BC$ и AD проходит через середину хорды BC, как высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, то высота AD будет лежать на диаметре AK. Согласно условию

$AD + BC = AK$. Если обозначить высоту AD через h, то $KD = 2r - h$, $BC = KD$, $BD = DC = \frac{BC}{2} = \frac{2r-h}{2}$.

На основании теоремы о произведении отрезков хорд, пересекающихся внутри круга, имеем $BD \cdot DC = AO \cdot DK$ или $\left(\frac{2r-h}{2}\right)^2 = h(2r - h)$. Решая это уравнение относительно h, получим

$$h = \frac{2}{5} r.$$

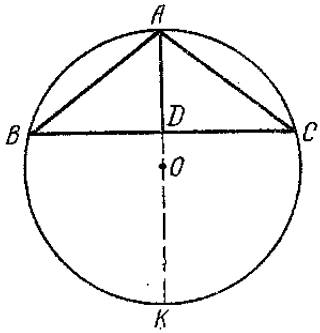


Рис. 5.15.

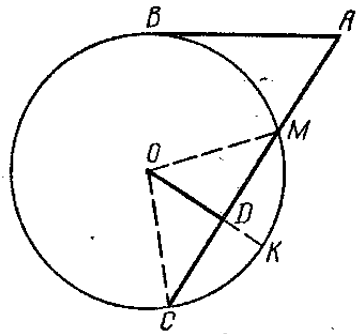


Рис. 5.16.

№ 5.6. Секущая и касательная, выходящие из одной точки, (рис. 5.16) соответственно равны 40 *см* и 20 *см*. Секущая удалена от центра на 8 *см*. Определить радиус круга.

Р е ш е н и е. На основании теоремы о касательной и секущей, проведенных к окружности из одной точки, имеем

$$AB^2 = AM \cdot AC,$$

$$400 = 40 \cdot AM, \text{ откуда } AM = 10 \text{ см},$$

$$CM = AC - AM = 40 - 10 = 30 \text{ см}.$$

OK — радиус, перпендикулярный к хорде CM. Следовательно, он делит хорду пополам. Поэтому

$$CD = DM = \frac{CM}{2} = 15 \text{ см}.$$

Из прямоугольного $\triangle OMD$ по теореме Пифагора находим

$$OM = \sqrt{OD^2 + DM^2} = \sqrt{64 + 225} = 17 \text{ см}.$$

№ 5.7. В равнобедренной трапеции большее основание равно диагонали и равно a. Разность между основаниями равна b. Определить длину боковых сторон трапеции.

Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 5.17)

$$AB = CD, \quad AC = AD = a, \quad AD - BC = b.$$

Определить CD.

Опустим из точек B и C перпендикуляры BM и CN на основание AD. Тогда, поскольку трапеция равнобочная,

$$AM = DN = \frac{1}{2}(AD - MN) =$$

$$= \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{b}{2}.$$

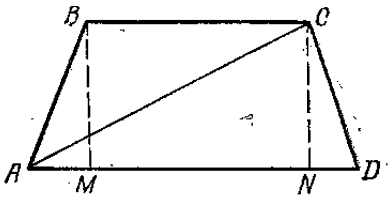


Рис. 5.17.

Из $\triangle ACD$ на основании теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого угла,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DN$$

или

$$a^2 = a^2 + CD^2 - 2a\frac{b}{2}.$$

Откуда $CD^2 = ab$ или $CD = \sqrt{ab}$.

ЗАНЯТИЕ ШЕСТОЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Теоретический материал

1. Геометрическое место точек. Геометрическим местом точек называется совокупность точек, обладающих каким-то общим свойством.

Так, например, все точки, которые находятся на одинаковом расстоянии от двух данных точек, располагаются на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка, соединяющего эти две точки (рис. 6.1). Поэтому говорят, что перпендикуляр, проведенный через середину отрезка, есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

Примером геометрического места точек является также окружность. Поэтому наряду с определением окружности, которое было дано во втором занятии (п. 1), существует еще следующее: окруж-

ностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

Биссектриса угла обладает тем свойством, что все точки, лежащие на биссектрисе, равноудалены от сторон угла (рис. 6.2), т. е. $M_1K_1 = K_1N_1$, $M_2K_2 = K_2N_2$, ... Поэтому, биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон этого угла.

Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние d, представляет собой пару прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на расстоянии d.

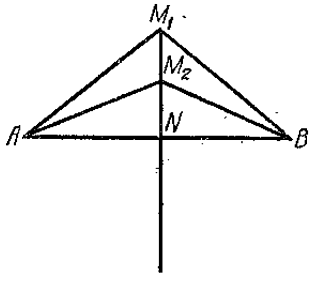


Рис. 6.1.

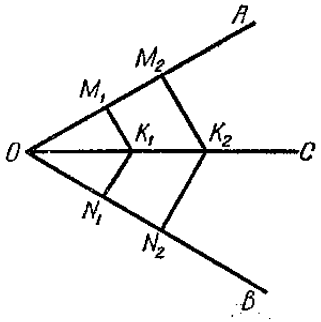


Рис. 6.2.

2. Задачи на построение. Решить геометрическую задачу на построение — значит начертить фигуру, удовлетворяющую некоторым данным условиям. Например, построить треугольник по трем данным сторонам — значит начертить такой треугольник, стороны которого были бы равны трем данным отрезкам. Заметим при этом, что в элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые можно выполнить с помощью линейки и циркуля.

Всякая задача на построение состоит из четырех частей: анализ, построение, доказательство и исследование.

Решение начинается с анализа. Для этого, предположив, что задача решена, делают чертеж, соответствующий условиям задачи, и с помощью его пытаются установить связи между данными и искомыми условиями, чтобы составить план построения. По составленному плану строят искомую фигуру. Это есть вторая часть задачи — построение. Третья часть включает в себя доказательство правильности построенного решения. Четвертая часть — исследование — заключается в выяснении вопросов о существовании и единственности решения.

Ниже приводятся так называемые основные задачи на построение. Приведена только вторая часть — построение. Более деталь-

ное решение некоторых задач на построение, включающее все четыре части, рассмотрим во второй части занятия.

а) Разделить данный отрезок пополам.

Из концов A и B отрезка (рис. 6.3) как из центров радиусом, бо́льшим половины отрезка AB, проводим дуги, которые пересе-

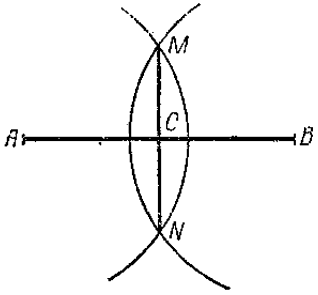


Рис. 6.3.

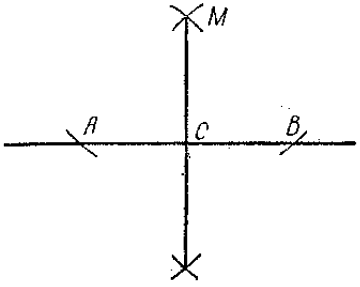


Рис. 6.4.

каются в точках M и N. Точка C пересечения отрезка MN с AB и есть середина отрезка AB.

б) Точно так же решается задача: к данному отрезку провести перпендикуляр, проходящий через его середину.

в) Из данной точки на данную прямую опустить перпендикуляр.

Из данной точки M (рис. 6.4) как из центра произвольным радиусом (но бо́льшим расстояния от точки M до данной прямой) опи-

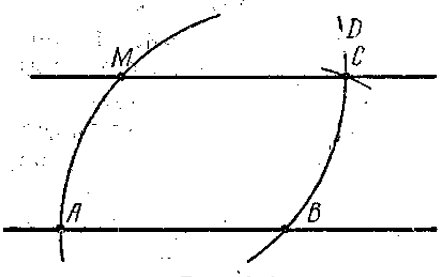


Рис. 6.5.

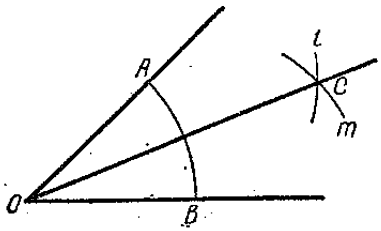


Рис. 6.6.

сываем дугу, которая пересекает данную прямую в точках A и B. Перпендикуляр, опущенный из точки M на данную прямую, очевидно, будет проходить через середину отрезка AB. Поэтому с отрезком AB поступаем дальше, как в задаче б).

г) Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Из данной точки M (рис. 6.5) как из центра произвольным, но бо́льшим расстояния от точки M до прямой, радиусом описываем

дугу BD, которая пересекает данную прямую в точке B. Затем из точки B как из центра тем же радиусом проводим дугу MA, пересекающую данную прямую в точке A. Из точки B как из центра радиусом, равным отрезку AM, проводим дугу, которая пересекает дугу BD в точке C. Прямая MC будет параллельна данной прямой, т. е. это будет искомая прямая.

д) Разделить данный угол пополам.

Из вершины O (рис. 6.6) как из центра произвольным радиусом описываем дугу, которая пересекает стороны данного угла в точках A и B. Из точек A и B как из центра произвольным, но бо́льшим

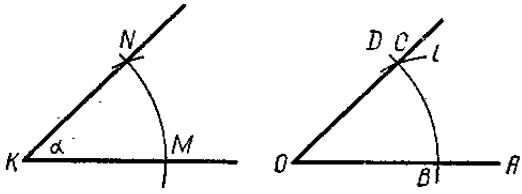


Рис. 6. 7.

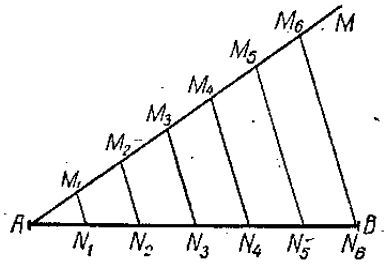


Рис. 6. 8.

половины отрезка AB, радиусом описываем дуги l и m, которые пересекаются в точке C. Луч OC и делит данный угол пополам, т. е. является его биссектрисой.

е) Построить угол, равный данному углу, имеющий данную вершину и сторону.

Пусть дан угол α (рис. 6.7). Требуется построить угол с вершиной в точке O и стороной OA, равный данному углу α.

Из вершины K данного угла как из центра произвольным радиусом описываем дугу, которая пересекает стороны угла в точках M и N. Тем же самым радиусом из точки O описываем дугу BD, пересекающую сторону OA в точке B. Из точки B как из центра радиусом, равным отрезку MN, описываем дугу l, которая пересекается с дугой BD в точке C. Проведя луч OC, получим угол COA, равный данному углу α.

ж) Разделить данный отрезок на n равных частей.

Через точку A (рис. 6.8) под произвольным углом проводим луч AM. Затем от точки A откладываем n равных отрезков $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = \ldots = M_{n-1}M_n$. Конец M_n последнего n-го отрезка соединяем с концом B отрезка AB и через точки M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1} проводим прямые, параллельные прямой

M_nB. Точки N_1, N_2, N_3, ..., N_n пересечения этих прямых с отрезком AB и разделят отрезок AB на n равных частей. На рис. 6.8 приведен случай деления отрезка AB на 6 ($n = 6$) равных частей.

з) Разделить данный отрезок на три части, пропорциональные отрезкам m, n, p.

Через точку A (рис. 6.9) под произвольным углом проводим луч AM и на нем от точки A откладываем отрезки, равные данным от-

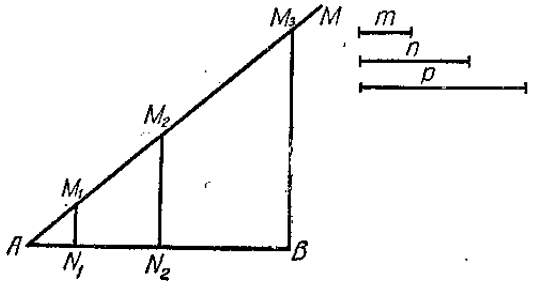


Рис. 6.9.

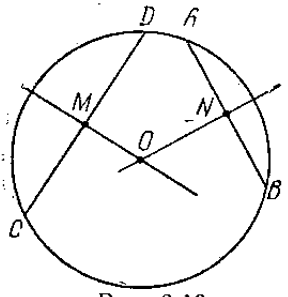


Рис. 6.10.

резкам m, n, p, т. е. $AM_1 = m$, $M_1M_2 = n$, $M_2M_3 = p$. Соединяем точку M_3 с концом B отрезка AB и через точки M_1 и M_2 проводим прямые, параллельные M_3B. Точки N_1 и N_2 пересечения этих прямых с отрезком AB и разделят его на 3 части, пропорциональные отрезкам m, n, p.

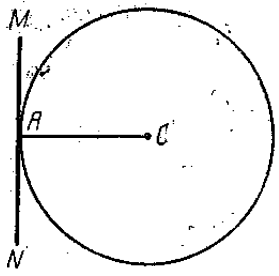


Рис. 6.11.

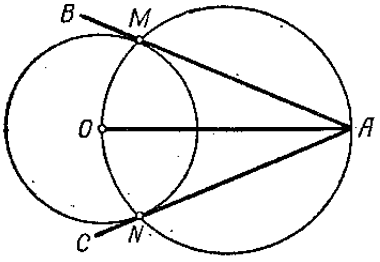


Рис. 6.12.

Аналогично решается и задача о разбиении отрезка на большее число частей, пропорциональных данным отрезкам.

и) Найти центр данной окружности.

В данной окружности проводим две произвольные непараллельные хорды AB и CD и через их середины M и N проводим перпендикуляры. Точка O пересечения этих перпендикуляров и будет центром данной окружности (рис. 6.10).

к) Провести касательную к данной окружности через данную точку.

Если данная точка A (рис. 6.11) лежит на окружности, то проведя радиус OA и восстановив к нему перпендикуляр в точке A, получим касательную.

Если данная точка A (рис. 6.12) лежит вне окружности, то построив на отрезке OA как на диаметре окружность, которая пересекает данную окружность в точках M и N, и проведя прямые AM и AN, получим искомые касательные.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 6.1. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок длиной a виден под данным углом α.

Р е ш е н и е. Пусть дан отрезок $AB = a$ и $\angle D = \alpha$, под которым виден отрезок AB из искомых точек (рис. 6.13).

Из конца A отрезка AB под произвольным углом к нему проведем луч AM и в произвольной точке N на этом луче как при вершине построим $\angle KNA = \alpha$. Через точку B проведем прямую $BP \parallel KN$. Очевидно, из точки P данный отрезок AB виден под данным углом α.

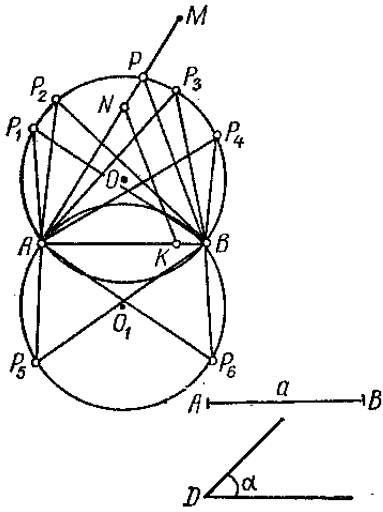


Рис. 6.13.

Если теперь через точки A, P и B провести окружность (а такую окружность можно провести только одну), то $\angle AP_1B = \angle AP_2B = \angle APB = \ldots$, как вписанные углы, опирающиеся на дугу AB.

Аналогичные построения можно сделать и по другую сторону от отрезка AB, в результате чего получим дугу окружности AP_5B, из всех точек которой отрезок AB виден под данным углом α.

Таким образом, геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, представляет собой дуги двух окружностей с общей хордой, равной данному отрезку.

№ 6.2. Найти геометрическое место точек — середин хорд, проходящих через одну заданную точку внутри окружности.

Р е ш е н и е. Пусть дана окружность O и внутри ее точка M (рис. 6.14). Центр окружности, точка O, очевидно, будет принадле-

жать искомому геометрическому месту, поскольку является серединой диаметра AB, проходящего через заданную точку M.

Проведем произвольную хорду CD и соединим ее середину P с центром O окружности. $OP \perp CD$ как радиус, проходящий через середину хорды. Поэтому $\angle MPO = 90°$. Хорда CD нами выбрана произвольно, поэтому этим же свойством будет обладать любая другая хорда, проходящая через точку M (например, для хорды KL $\angle MNO = 90°$). Таким образом, к искомому геометрическому месту принадлежат вершины прямых углов прямоугольных треугольников с общей гипотенузой MO, т. е. это есть окружность, построенная на отрезке MO как на диаметре.

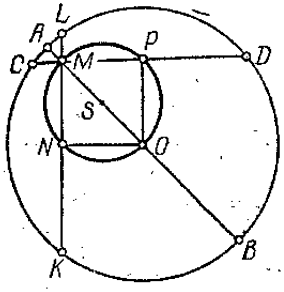


Рис. 6.14.

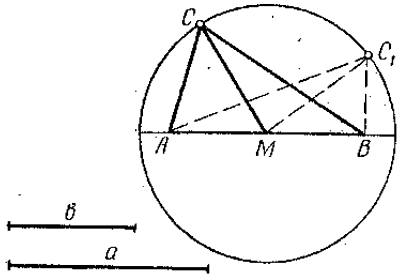


Рис. 6.15.

№ 6.3. Найти геометрическое место точек, являющихся вершинами треугольников с данным основанием и с данной медианой, проведенной к этому основанию.

Р е ш е н и е. Пусть даны два отрезка a и b (рис. 6.15), являющиеся соответственно основанием треугольника и медианой, проведенной к этому основанию.

На произвольной прямой отложим отрезок $AB = a$. Из середины этого отрезка под произвольным углом проведем луч и на нем отложим отрезок $MC = b$. Очевидно, вершина C треугольника ABC принадлежит искомому геометрическому месту. Очевидно, также, что вершины всех остальных треугольников будут равноудалены от точки M и отстоят от нее на расстоянии, равном b, т. е. искомым геометрическим местом точек является окружность радиуса b с центром в середине отрезка $AB = a$.

№ 6.4. Найти геометрическое место точек, являющихся серединами хорд, отсекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку вне окружности.

Р е ш е н и е. Пусть дана окружность O и точка M вне ее (рис. 6.16).

Центр окружности O будет принадлежать искомому геометрическому месту, поскольку является серединой наибольшей хорды. Пусть KA — хорда, отсекаемая данной окружностью от произвольной прямой, проходящей через точку M. Соединим середину C этой хорды с точкой O. Очевидно, $OC \perp AK$. Значит, точка C принадлежит окружности, построенной на отрезке OM как на диаметре. На этой окружности лежат и все остальные точки. Кроме того, искомые точки должны лежать внутри данной окружности.

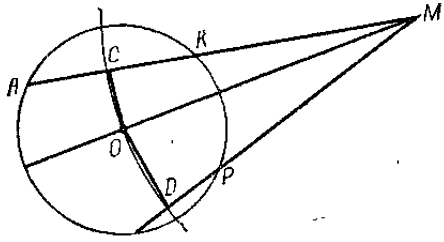


Рис. 6.16.

№ 6.5. Построить треугольник по трем данным его сторонам a, b и c.

Р е ш е н и е. *Анализ.* Предположим, что задача решена. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 6.17) — искомый. В нем $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Две вершины этого треугольника мы можем выбрать произвольно, как концы отрезка $BC = a$. Тогда третья вершина будет удалена от вершины C на расстоянии, равном b, т. е. будет находиться на

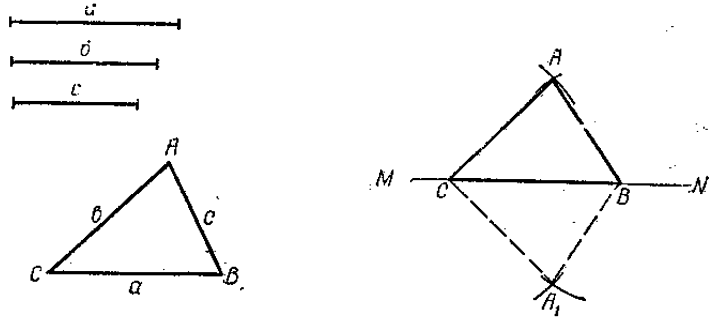


Рис. 6.17.

дуге окружности радиуса b с центром в точке C. Кроме того, эта же вершина будет находиться на расстоянии c от вершины B, т. е. на дуге окружности радиуса c с центром в точке B. Поэтому искомая вершина будет находиться в точке пересечения дуг указанных окружностей.

Построение. На произвольной прямой MN откладываем отрезок $CB = a$. Из точек C и B как из центров радиусами, соответственно равными b и c, описываем две дуги до их взаимного пе-

ресечения. Точку их пересечения A соединяем с точками C и B. $\triangle ABC$ будет искомый.

Доказательство. В построенном $\triangle ABC$ стороны соответственно равны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, т. е. $\triangle ABC$ построен правильно.

Исследование. Построение возможно тогда, когда больший отрезок будет меньше суммы двух остальных. Если же это условие выполнено, то существует два треугольника, взаимно симметричных относительно прямой MN.

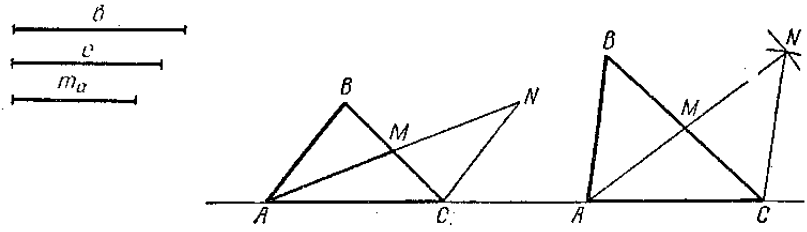


Рис. 6.18.

№ 6.6. Построить треугольник по двум заданным сторонам b, c и медиане, проведенной к третьей стороне m_a.

Р е ш е н и е. *Анализ.* Пусть $\triangle ABC$ (рис. 6.18) — искомый. В нем $AB = c$, $AC = b$, $AM = m_a$. На продолжении медианы отложим отрезок $MN = AM$. Четырехугольник $ABNC$ — параллелограмм, поскольку $BM = MC$, $AM = MN$ (т. е. диагонали в точке пересечения делятся пополам). Поэтому $NC = AB = c$.

Построение. На произвольной прямой отложим отрезок $AC = b$. Из вершин A и C как из центров радиусами, соответственно равными $2m_a$ и c, опишем дуги, до их пересечения в точке N. Через середину M отрезка AN проведем прямую и отложим на ней $MB = CM$. $\triangle ABC$ — искомый.

Доказательство. В треугольнике ABC $AC = b$, $AB = NC = c$, $AM = \frac{1}{2} AN = m_a$.

Исследование. Построение начинается с $\triangle ANC$. А оно возможно, если $AM < AC + CN$, т. е. если $2m_a < b + c$.

Задача имеет два решения, поскольку при построении $\triangle ANC$ возможны два варианта.

№ 6.7. Построить треугольник по стороне a, сумме двух других сторон $b + c$ и $\angle A$, лежащему против стороны a.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC (рис. 6.19) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. На продолжении стороны CA отложим $AD =$

$= AB$. Тогда $CD = CA + AD = b + c$. $\triangle BAD$ — равнобедренный, следовательно, $\angle ABD = \angle BDA$. Но $\angle BAC = \angle ABD + \angle ADB$, как внешний угол треугольника ABD. Поэтому $\angle BDA = \frac{1}{2} \angle BAC$.

Итак, в $\triangle CBD$ известны стороны $BC = a$, $CD = b + c$ и $\angle BDA = \frac{1}{2} \angle BAC$. Вершина A искомого треугольника является вершиной равнобедренного $\triangle ABD$.

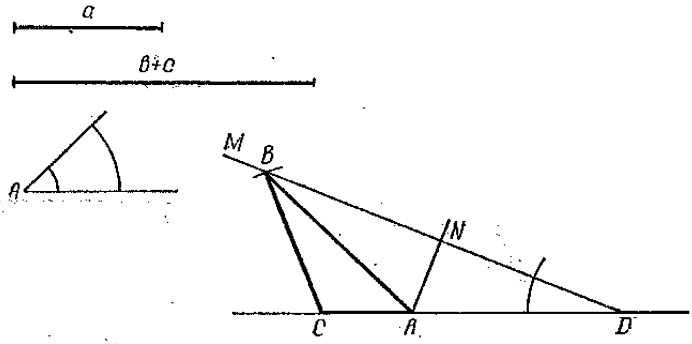


Рис. 6.19.

Построение будет выглядеть следующим образом. На произвольной прямой отложим отрезок $CD = b + c$. В точке D как при вершине строим $\angle CDM = \frac{1}{2} A$. Из точки C как из центра радиусом, равным отрезку a, описываем дугу до пересечения в точке B со стороной MD угла CDM. Через середину N отрезка BD проводим перпендикуляр до пересечения в точке A с отрезком CD. $\triangle ABC$ — искомый.

Доказательство и исследование предлагаем читателю провести самостоятельно.

№ 6.8. На данном отрезке a построить сегмент, вмещающий данный угол α.

Р е ш е н и е. Пусть дан отрезок a (рис. 6.20) и $\angle \alpha$, опирающийся на дугу, стягиваемую этим отрезком.

Предположим, что задача решена, т. е. сегмент ACB стягивается отрезком $AB = a$ и вмещает в себе $\angle ACB = \alpha$. Очевидно, любой угол AC_1B, AC_2B и т. д. с вершиной на дуге ACB будет равен данному углу α. Если один из углов, например $\angle ACB$, построен, то центр дуги ACB легко находится как точка пересе-

чения перпендикуляров, проведенных через середины отрезков AC и BC.

Поэтому построение будет следующее: на произвольном луче, выходящем из точки A, выбираем произвольную точку N и в ней как при вершине строим $\angle ANM = \alpha$. Через точку B проводим прямую, параллельную AN, до пересечения в точке C с прямой AN. $\angle BCA = \alpha$ и опирается на данный отрезок AB. Через середины отрезков AC и BC проводим перпендикуляры до их пересечения в точке O. Радиусом OA описываем дугу ACB, которая и будет искомой.

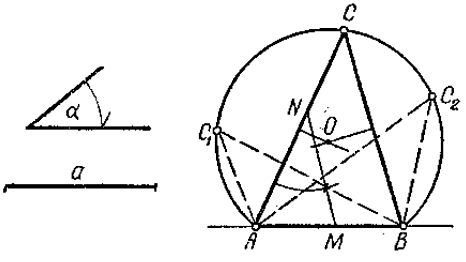


Рис. 6.20.

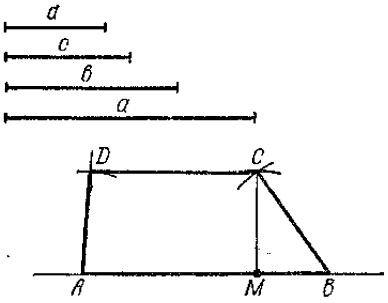


Рис. 6.21.

№ 6.9. Построить трапецию по четырем сторонам.

Р е ш е н и е. Пусть даны четыре отрезка a, b, c, d, являющиеся сторонами трапеции. При этом будем предполагать, что a и b — основания, c и d — боковые стороны трапеции.

Не проводя анализа (он ясно виден из рис. 6.21), дадим сразу построение трапеции.

На произвольной прямой откладываем $AB = a$, $AM = b$. Из точек M и B как из центров радиусами, соответственно равными d и c, описываем две дуги до их пересечения в точке C. Это будет третья вершина трапеции. Чтобы найти четвертую вершину, достаточно из точек C и A радиусами, соответственно равными b и d, описать дуги до их взаимного пересечения в точке D. Четырехугольник $ABCD$ — искомая трапеция.

№ 6.10. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

Р е ш е н и е. Очевидно, центр искомой окружности будет определяться как точка пересечения окружности, описанной из данной точки A как из центра радиусом, равным радиусу искомой окружности, и прямой CD, параллельной данной прямой MN и отстоящей от нее на расстоянии, равном радиусу искомой окружности (рис. 6.22).

Задача может иметь два, одно или не иметь ни одного решения в зависимости от того, будет ли расстояние от данной точки A до данной прямой MN меньше, равняться или больше диаметра искомой окружности. (На рис. 6.22. приведен случай, когда расстояние от точки A до прямой CN меньше двух радиусов, а поэтому задача имеет два решения).

№ 6.11. Построить окружность, касательную к данной прямой в данной точке и к другой данной прямой.

Р е ш е н и е. Если данные прямые AB и CD параллельны, то центр O искомой окружности будет лежать в середине отрезка MN,

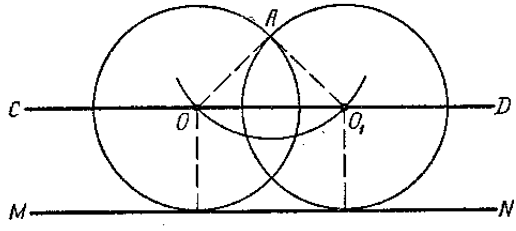


Рис. 6.22.

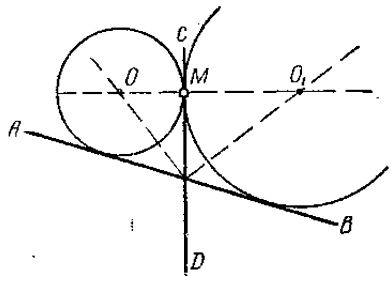


Рис. 6.23.

перпендикулярного к данным прямым и проходящего через заданную точку M.

Если прямые AB и CD не параллельны (рис. 6.23), то центр искомой окружности будет определяться пересечением перпендикуляра к прямой CD, проходящего через данную точку M, и биссектрис углов, образованных данными прямыми при пересечении.

ЗАНЯТИЕ СЕДЬМОЕ

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Теоретический материал

1. Некоторые свойства многоугольников. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна $180° (n - 2)$.

Если из вершины каждого угла выпуклого многоугольника провести продолжение одной из сторон этого угла, то сумма всех образованных при этом внешних углов многоугольника равна (независимо от числа сторон многоугольника) 360°.

Многоугольники называются одноименными, если они имеют одинаковое число сторон.

Два одноименных многоугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого, а стороны многоугольников, заключающие равные углы, пропорциональны. Такие стороны подобных многоугольников в дальнейшем будем называть сходственными сторонами.

В подобных многоугольниках отношение их периметров равно отношению сходственных сторон.

2. Вписанные и описанные многоугольники. Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется вписан-

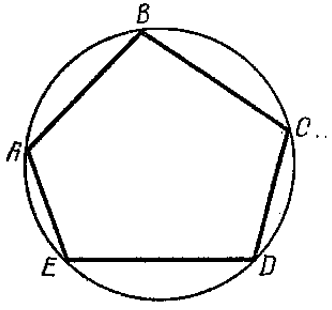


Рис. 7.1.

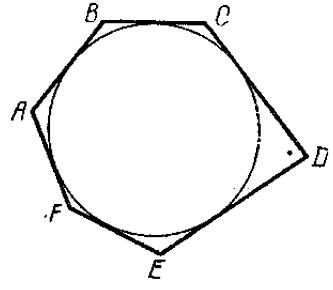


Рис. 7.2.

ным в эту окружность (рис. 7.1). Многоугольник, все стороны которого касаются некоторой окружности, называется описанным около этой окружности (рис. 7.2).

Сама окружность в первом случае называется описанной, а во втором — вписанной.

Около всякого треугольника можно описать окружность. Центр этой окружности лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, а радиус равен расстоянию от центра окружности до одной из вершин треугольника (см. третье занятие, п. 3).

Во всякий треугольник можно вписать окружность. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов этого треугольника, а радиус равен расстоянию от центра до одной из сторон (см. третье занятие, п. 3).

В четырехугольник можно вписать окружность и вокруг него можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов четырехугольника равны между собой.

3. Правильные многоугольники. Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и углы равны.

Если окружность разделить на n равных частей и каждые две соседние точки деления соединить отрезками прямых, то получим правильный многоугольник с числом сторон, равным n. Если же через каждую точку деления провести касательную и продолжить каждую из них до взаимного пересечения с касательной, проведенной в соседней точке, то получится также правильный n-угольник.

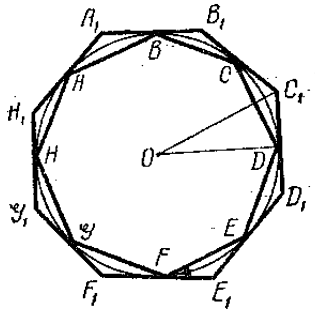


Рис. 7.3.

Таким образом, в правильный многоугольник всегда можно вписать окружность и около него можно описать окружность.

На рис. 7.3 представлены вписанный правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$ и описанный правильный восьмиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$. Радиус описанной окружности называется радиусом правильного многоугольника, а радиус вписанной окружности называется его апофемой. Так для восьмиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 7.3) радиус будет равен OC_1, апофема — OD.

Правильные одноименные многоугольники подобны, и их стороны относятся как апофемы или радиусы.

Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон и через радиус R окружности по формуле

$$b_n = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_a^2}}, \tag{7.1}$$

а сторона a_{2n} правильного вписанного в окружность радиуса R $2n$-угольника выражается через стороны правильного вписанного в ту же окружность n-угольника по формуле

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}. \tag{7.2}$$

(Вывод формул (7.1) и (7.2) см. в задачах № 7.1 и № 7.2).

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 7.1. Выразить сторону b_n правильного описанного вокруг окружности n-угольника, если известны радиус R окружности и сторона a_n правильного вписанного в эту окружность n-угольника.

Р е ш е н и е. Пусть $BC = a_n$ (рис. 7.4) — сторона правильного вписанного n-угольника. $OB = R$ — радиус окружности. Требуется определить AK — сторону правильного описанного n-угольника.

$\triangle ACD = \triangle ABD$, поскольку у них AD — общая сторона, $AC = AB$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки. $\angle CAD = \angle BAD$ (OA — биссектриса $\angle BAC$, поскольку $OB \perp AB$, $OC \perp AC$).

Следовательно, $CD = BD = \frac{BC}{2} = \frac{a_n}{2}$ и $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Из прямоугольного $\triangle ODB$ по теореме Пифагора

$$OD^2 = OB^2 - BD^2 = R^2 - \frac{a_n}{4}$$

или

$$OD = \frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2}.$$

На основании теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике имеем

$$BD^2 = OD \cdot AD \text{ и } AB^2 = OA \cdot AD.$$

Из первого равенства находим

$$AD = \frac{BD^2}{OD} = \frac{a_n^2}{2\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Подставляя найденное значение AD во второе равенство и учитывая, что $OA = OD + AD$, получим

$$AB^2 = \left(\frac{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2} + \frac{a_n^2}{2\sqrt{4R^2 - a_n^2}}\right) \cdot \frac{a_n^2}{2\sqrt{4R^2 - a_n^2}} = \frac{R^2 a_n^2}{4R^2 - a_n^2},$$

откуда

$$AB = \frac{Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}. \quad \text{Но } AK = 2AB. \text{ Поэтому}$$

$$AK = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

№ 7.2. Выразить сторону a_{2n} правильного вписанного $2n$-угольника, через радиус R окружности и сторону a_n правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = a_n$ (рис. 7.5) — сторона правильного вписанного n-угольника. $OA = OC = R$. Требуется определить $AC = a_{2n}$ сторону правильного вписанного $2n$-угольника.

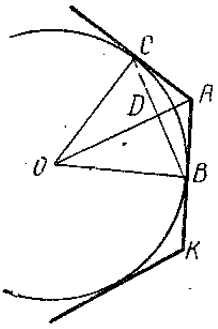


Рис. 7.4.

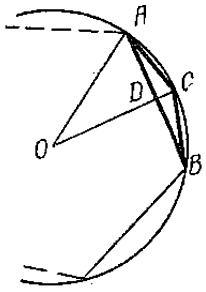


Рис. 7.5.

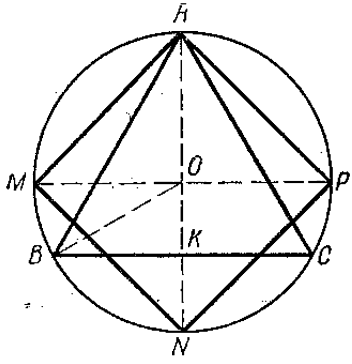


Рис. 7.6.

Из прямоугольного $\triangle ACD$ $AC^2 = AD^2 + CD^2$, $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{a_n}{2}$, $CD = OC - OD$. Из прямоугольного $\triangle OAD$

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}, \quad CD = R - \sqrt{R_2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

$$AC^2 = \frac{a_n^2}{4} + R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}} + R^2 - \frac{a_n^2}{4} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Итак,

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

№ 7.3. Выразить через радиус R описанной окружности сторону: а) равностороннего треугольника, б) квадрата, в) правильного шестиугольника, г) правильного восьмиугольника, д) правильного десятиугольника, е) правильного пятиугольника.

Р е ш е н и е. а) Из прямоугольного треугольника ABK (рис. 7.6)

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

$OK = \frac{1}{3} AK$, так как O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Следовательно,

$$OK = \frac{AB\sqrt{3}}{6}.$$

Из прямоугольного $\triangle OBK$

$$BK^2 = OB^2 - OK^2 \text{ или } \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{AB\sqrt{3}}{6}\right)^2.$$

Решая полученное уравнение относительно AB, получим $AB = R\sqrt{3}$.

Итак, сторона a_3 равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна

$$a_3 = R\sqrt{3}.$$

б) В прямоугольном $\triangle ONP$ (рис. 7.6) $OP = ON = R$. Поэтому

$$NP = \sqrt{OP^2 + ON^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Итак, сторона a_n квадрата равна

$$a_n = R\sqrt{2}.$$

в) Сторону правильного вписанного шестиугольника найдем по формуле удвоения (7.2), используя сторону равностороннего треугольника.

$$a_6 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R.$$

Итак, $a_6 = R$, т. е. сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна радиусу этой окружности.

г) Аналогично, используя сторону квадрата, находим

$$a_8 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

д) Пусть AB (рис. 7.7) — сторона вписанного в окружность правильного десятиугольника, O — центр окружности. Найти AB, если радиус окружности равен R.

Поскольку стороны правильного вписанного многоугольника стягивают равные дуги, то центральный угол, образованный двумя радиусами, проведенными в концы одной стороны равен $\frac{360^\circ}{n}$.

В частности, для правильного десятиугольника этот угол будет равен $\frac{360°}{10} = 36°$. Итак, $\angle AOB = 36°$. Тогда $\angle OAB = \angle OBA = 72°$. Проведем биссектрису BD угла OBA. $\triangle ODB$ — равнобедренный ($\angle BOD = \angle DBO = 36°$). Следовательно, $OD = BD$. Но $\triangle ABD$ также равнобедренный ($\angle BAD = \angle BDA = 72°$).

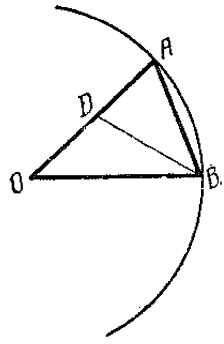


Рис. 7.7.

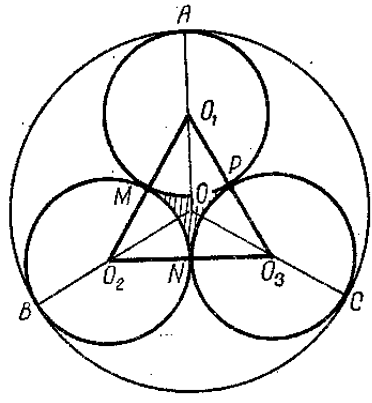


Рис. 7.8.

Поэтому $AB = BD$. На основании теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника имеем

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AD}{OD}.$$

Обозначим $AB = x$. Тогда $OD = AB = x$. $AD = OA - OD = R - x$ и пропорция примет вид

$$\frac{x}{R} = \frac{R-x}{x}.$$

Решая уравнение $x^2 + Rx - R^2 = 0$ и выбирая положительное решение, находим

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Итак, сторона a_{10} правильного вписанного десятиугольника равна

$$a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

е) Для нахождения стороны a_5 правильного пятиугольника снова воспользуемся формулой удвоения (7.2), считая известной сто-

рону десятиугольника

$$a_{10} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_5^2}{4}}}$$

или

$$\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_5^2}{4}}}.$$

Решая это уравнение относительно a_5, находим

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

№ 7.4. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касающиеся между собой. Определить их радиус.

Р е ш е н и е. $\triangle O_1O_2O_3$ (рис. 7.8) — равносторонний, поскольку каждая сторона его состоит из суммы двух равных отрезков.

Обозначим радиус вписанных окружностей через x.

Тогда $O_2O_1 = 2x$, $O_2P = x\sqrt{3}$,

$$OO_2 = \frac{2}{3}O_2P = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

С другой стороны $OO_2 = OB - BO_2 = R - x$. Из уравнения $\frac{2x\sqrt{3}}{3} = R - x$ находим $x = \frac{3R}{2\sqrt{3}+3}$ или, если умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, то

$$x = R(2\sqrt{3} - 3).$$

ЗАНЯТИЕ ВОСЬМОЕ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Теоретический материал

1. Площадь. Величина части плоскости, занимаемой плоской фигурой, называется площадью этой фигуры.

Площади всякой фигуры соответствует некоторое число, измеряющее эту площадь. Оно должно удовлетворять следующим условиям: 1) это число неотрицательно; 2) числа, соответствующие равным фигурам, равны; 3) площадь фигуры, составленной из нескольких

фигур без общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.

При измерении площадей за единицу измерения принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице.

Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

2. Площадь треугольника. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, т. е. (рис. 8.1)

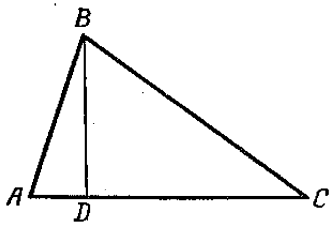


Рис. 8.1.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \qquad (8.1)$$

Если обозначить, через a, b, c — стороны треугольника, а через h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на соответствующие стороны, то площадь треугольника можно вычислять по любой из формул

$$S = \frac{ah_a}{2}, \quad S = \frac{bh_b}{2}, \quad S = \frac{ch_c}{2}.$$

Кроме того, для вычисления площади треугольника существуют следующие формулы:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ (формула Герона)} \qquad (8.2)$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \qquad (8.3)$$

$$S = p \cdot r, \qquad (8.4)$$

где p — полупериметр,

R — радиус описанной около треугольника окружности,

r — радиус вписанной в треугольник окружности.

3. Площади четырехугольников. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b. \qquad (8.5)$$

В частности, площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон, а площадь квадрата равна квадрату его стороны

$$S = a \cdot b, \quad S = a^2. \qquad (8.6)$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей

$$S = \frac{1}{2} l_1 \cdot l_2 \qquad (8.7)$$

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту или произведению полусуммы оснований на высоту

$$S = \frac{a+b}{2} h. \tag{8.8}$$

4. Площадь многоугольников. Для вычисления площади произвольного многоугольника нет общей формулы. Поэтому площадь такого многоугольника при необходимости может быть вычислена как сумма площадей треугольников, на которые разбивают многоугольник диагонали, исходящие из одной вершины.

Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в многоугольник окружности $S = pr$.

Площадь правильного многоугольника равна произведению его периметра на половину апофемы.

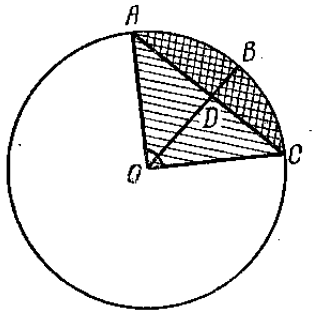


Рис. 8.2.

4. Площадь круга и его частей. Под площадью круга понимают общий предел площадей вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус, т. е.

$$S = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2. \tag{8.9}$$

Площадь сектора $OABC$ (рис. 8.2) равна половине произведения радиуса на длину дуги, т. е.

$$S = \frac{l \cdot R}{2}, \tag{8.10}$$

где через l обозначена длина дуги ABC.

Площадь кругового сегмента ABC может быть вычислена как разность площадей сектора $OABC$ и треугольника OAC.

Иногда для вычисления площади сегмента пользуются приближенной фромулой

$$S = \frac{2}{3} bh, \tag{8.11}$$

где b — основание сегмента (на рис. 8.2 $b = AC$),

h — высота или стрела сегмента ($h = BD$).

5. Отношение площадей подобных фигур. Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

Справедливо и более общее утверждение: в подобных многоугольниках отношение площадей равно отношению квадратов сходственных сторон.

Поскольку любые два круга — суть подобные фигуры, то отношение площадей двух кругов равно отношению квадратов их радиусов.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 8.1. Вычислить площадь равностороннего треугольника со стороной, равной a.

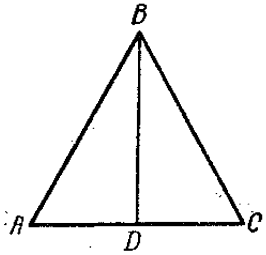


Рис. 8.3.

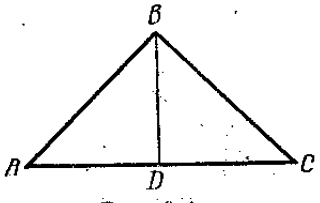


Рис. 8.4.

Р е ш е н и е. I *способ*. Проведем высоту BD (рис. 8.3). Тогда согласно формулы (8.1)

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Из прямоугольного $\triangle ABD$

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

II. *способ*. Периметр равностороннего треугольника со стороной a равен $3a$. По формуле Герона (8.2) имеем

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

№ 8.2. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна a, а углы при основании 30°.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 8.4)

$$AB = BC, \quad \angle BAC = \angle BCA = 30°.$$

Проведем высоту BD. В прямоугольном $\triangle CBD$ катет BD лежит против угла в 30°. Поэтому

$$BD = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2},$$

$$AD = \sqrt{CB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$AC = 2CD = a\sqrt{3},$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

№ 8.3. Через середину O гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 8.5) проведем перпендикуляр, пересекающий один катет в точке K, а продолжение другого — в точке M. Определить стороны и площадь треугольника ABC, если $OK = a$, $OM = b$.

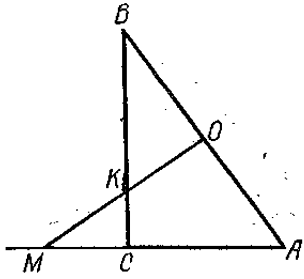


Рис. 8.5.

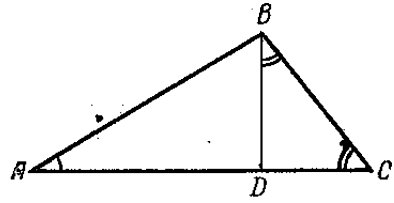


Рис. 8.6.

Решение. $\triangle AOM \sim \triangle OBK$ как прямоугольные треугольники с равными острыми углами ($\angle OBK = \angle OMA$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поэтому

$$\frac{OA}{OK} = \frac{OM}{OB}. \text{ Поскольку } OB = OA,$$

то

$$OB^2 = OK \cdot OM, \quad OB^2 = a \cdot b, \quad OB = \sqrt{ab},$$

$$AB = 2 \cdot OB = 2\sqrt{ab}.$$

Из прямоугольного $\triangle OBK$ $BK = \sqrt{OB^2 + OK^2} = \sqrt{a^2 + ab} = \sqrt{a(a + b)}$,

$\triangle OBK \sim \triangle MKC$, так как $\angle OKB = \angle MKC$.

Следовательно,

$$\frac{OK}{KC} = \frac{BK}{MK},$$

откуда

$$KC = \frac{OK \cdot MK}{BK} = \frac{a(b-a)}{\sqrt{a(a+b)}} = (b-a)\sqrt{\frac{a}{b+a}}.$$

$$BC = BK + KC = \sqrt{a(b+a)} + (b-a)\sqrt{\frac{a}{b+a}} = 2b\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Из $\triangle ABC$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2a\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

Площадь $\triangle ABC$ равна

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2b\sqrt{\frac{a}{a+b}} \cdot 2a\sqrt{\frac{b}{a+b}} = \frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}.$$

№ 8.4. В треугольнике сторона равна a, а прилежащие к ней углы 30° и 45°. Определить другие стороны и площадь треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 8.6) $AC = a$, $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 45°$. Проведем высоту BD и обозначим длину ее через x. Тогда $BD = \frac{1}{2} AB$ как катет, лежащий против угла в 30°, т. е. $AB = 2x$. $\triangle BDC$ — равнобедренный, поэтому $CD = BD = x$. Из прямоугольного $\triangle ABD$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}.$$

$AD + CD = AC = a$. Поэтому $x\sqrt{3} + x = a$.

Решая это уравнение, находим

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

$$AB = a(\sqrt{3} - 1). \quad BC = x\sqrt{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

№ 8.5. Прямоугольный треугольник с катетами a и $2a$ разделен на две равновеликие части прямой, перпендикулярной к гипотенузе. Определить длину отрезка этой прямой, лежащей между сторо-

нами треугольника, и расстояние ее от вершины меньшего угла треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 8.7)

$$AC = a, \quad BC = 2a, \quad MN \perp AB, \quad S_{BMN} = S_{ANMC},$$

определить MN и BN.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = a^2; \quad S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

$\triangle MBN \sim \triangle ABC$ как прямоугольные треугольники с равным острым углом ($\angle MBN$ — общий). Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Поэтому

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}} = \frac{BC^2}{BN^2} = \frac{AC^2}{MN^2}.$$

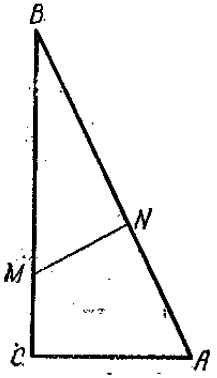


Рис. 8.7.

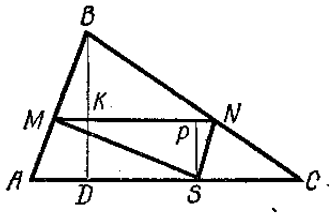


Рис. 8.8.

Из равенства первой пары отношений

$$2 = \frac{4a^2}{BN^2},$$

откуда $BN^2 = 2a^2$, $BN = a\sqrt{2}$.

Используя равенство первого и третьего отношения, находим $2 = \frac{a^2}{MN^2}$, откуда

$$MN^2 = \frac{a^2}{2}, \quad MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

№ 8.6. Прямая, параллельная основанию треугольника площади S, отсекает от него треугольник площади S_1. Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть $S_{\triangle ABC} = S$ (рис. 8.8), $S_{\triangle MBN} = S_1$. $MN \parallel AC$.

Требуется определить S_{MBNS}.

$$S_{MBNS} = S_{\triangle MBN} + S_{\triangle SMN},$$

$$S_{\triangle MNS} = \frac{1}{2} MN \cdot SP = \frac{1}{2} MN \cdot KD, \quad KD = BD - BK.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \text{ откуда } BD = \frac{2S}{AC}.$$

Аналогично

$$S_1 = \frac{1}{2} MN \cdot BK, \quad BK = \frac{2S_1}{MN}.$$

Следовательно,

$$KD = \frac{2S}{AC} - \frac{2S_1}{MN}; \ \triangle ABC \sim \triangle MBN.$$

Поэтому $\frac{S_1}{S} = \frac{MN^2}{AC^2}$ или $\frac{MN}{AC} = \sqrt{\frac{S_1}{S}}$,

$$S_{\triangle MNS} = \frac{1}{2} MN \cdot KD = \frac{1}{2} MN \left(\frac{2S}{AC} - \frac{2S_1}{MN} \right) =$$

$$= S \frac{MN}{AC} - S_1 = S \sqrt{\frac{S_1}{S}} - S_1 = \sqrt{S \cdot S_1} - S_1.$$

Следовательно,

$$S_{MBNC} = \sqrt{S_1 \cdot S} - S_1 + S_1 = \sqrt{S \cdot S_1}.$$

№ 8.7. Выразить разность квадратов диагоналей параллелограмма через его стороны m, n и площадь S.

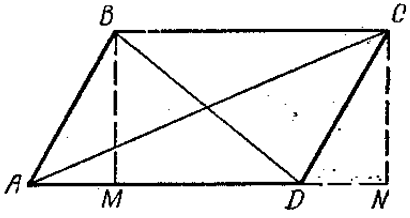


Рис. 8.9.

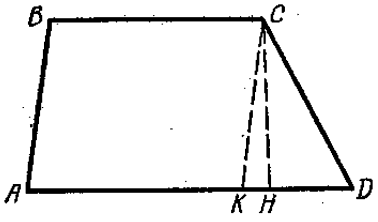


Рис. 8.10.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 8.9), $AD = BC = m$, $AB = CD = n$, $S_{ABCD} = S$. Определить $AC^2 - BD^2$.

Проведем высоты BM и CN.

Из $\triangle ACD$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DN = m^2 + n^2 + 2m \cdot DN.$$

Из $\triangle ABD$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AM = m^2 + n^2 - 2m \cdot AM.$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая, что $DN = AM$, получим

$$AC^2 - BD^2 = 4m \cdot AM.$$

Из $\triangle ABM$

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{n^2 - BM^2}.$$

Следовательно,

$$AC^2 - BD^2 = 4m\sqrt{n^2 - BM^2} = 4\sqrt{m^2n^2 - m^2 \cdot BM^2}.$$

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, т. е.

$$S = AD \cdot BM = m \cdot BM.$$

Поэтому

$$AC^2 - BD^2 = 4\sqrt{m^2n^2 - S^2}.$$

№ 8.8. По сторонам a, b, c, d определить площадь трапеции.
Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 8.10)

$$AD = a, \quad BC = b, \quad AB = c, \quad CD = d.$$

Через вершину C проведем $CH \perp AD$ и $CK \parallel AB$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} CH; \quad S_{\triangle KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH.$$

Найдем отношение площадей трапеции $ABCD$ и $\triangle KCD$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle KCD}} = \frac{\frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CH}{\frac{1}{2} KD \cdot CH} = \frac{BC + AD}{KD} = \frac{a + b}{a - b},$$

откуда

$$S_{ABCD} = S_{\triangle KCD} \cdot \frac{a + b}{a - b}.$$

Площадь $\triangle KCD$ может быть найдена по формуле Герона, так как известны все три стороны

$$S_{\triangle KCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(c + d + a - b)(c + a - b - d)(d + a - b - c) \times (c + d - a + b)} \times$$

Поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(c+d+a-b)(c+a-b-d)\times \cdots}$$

$$\cdots \overleftarrow{\times (d+a-b-c)(c+d-a+b)}.$$

№ 8.9. Вычислить площадь правильного десятиугольника, сторона которого равна a.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = a$ (рис. 8.11) сторона правильного десятиугольника.

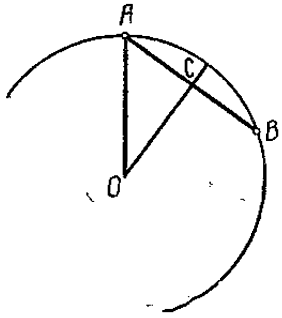


Рис. 8.11.

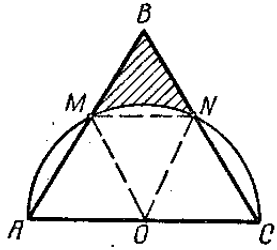


Рис. 8.12

Площадь правильного многоугольника равна произведению полупериметра на апофему, т. е.

$$S = 5a \cdot OC.$$

Из $\triangle AOC$

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}.$$

Сторона a десятиугольника выражается через радиус R описанной окружности следующим образом (см. № 7.3, д)

$$a = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Поэтому $OA = \dfrac{2a}{\sqrt{5}-1}$

и

$$OC = \sqrt{\frac{4a^2}{(\sqrt{5}-1)^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

$$S = 5a \cdot OC = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

№ 8.10. На стороне a равностороннего треугольника как на диаметре описана полуокружность, пересекающая две другие сто-

роны треугольника. Вычислить часть площади треугольника, лежащей вне полукруга.

Р е ш е н и е. $\triangle ABC$ (рис. 8.12) — равносторонний со стороной, равной a. Требуется определить площадь криволинейного треугольника MBN, заштрихованного на рисунке.

Искомая площадь S равна разности площадей ромба $OMBN$ и кругового сектора OMN.

Нетрудно доказать, что площадь ромба $OMBN$ равна половине площади $\triangle ABC$, т. е. $S_{OMBN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, а площадь сектора OMN равна одной шестой площади круга радиуса $OA = \frac{a}{2}$, т. е.

$$S_{OMN} = \frac{\pi a^2}{6 \cdot 4} = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Поэтому

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{24} = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

№ 8.11. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касающихся друг друга. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной этими тремя кругами.

Р е ш е н и е. Требуется определить площадь заштрихованной фигуры MPN (рис. 7.8).

Очевидно, искомая площадь S равна разности площади $\triangle O_1O_2O_3$ и площадей трех секторов O_1MP, O_2MN и O_3NP.

Радиус вписанных кругов равен $R(2\sqrt{3} - 3)$ (см. № 7.4). Сторона равностороннего $\triangle O_1O_2O_3$ равна $2R(2\sqrt{3} - 3)$. Поэтому

$$S_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{4R^2(2\sqrt{3} - 3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = R^2(2\sqrt{3} - 3)^2 \cdot \sqrt{3}.$$

Площадь каждого из указанных секторов равна одной шестой площади вписанного круга, т. е.

$$S_{O_1MP} = \frac{\pi R^2(2\sqrt{3} - 3)^2}{6}.$$

Поэтому

$$S = S_{\triangle O_1O_2O_3} - 3S_{O_1MP} = R^2(2\sqrt{3} - 3)^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2(2\sqrt{3} - 3)^2}{2} =$$

$$= R^2(2\sqrt{3} - 3)^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = R^2(21 - 12\sqrt{3})\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

ЗАНЯТИЕ ДЕВЯТОЕ

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Теоретический материал

1. Тригонометрические функции острого угла. В геометрии большое внимание уделяется изучению треугольников. Это объясняется тем, что треугольник является простейшей геометрической фигурой и любая сколь угодно сложная прямолинейная геометрическая фигура может быть разложена на треугольники. Поэтому,

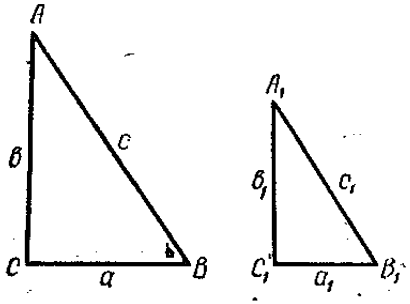


Рис. 9.1.

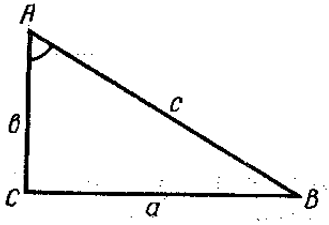


Рис. 9.2.

умея находить элементы треугольника, мы сможем находить и элементы более сложных геометрических фигур.

Произвольный треугольник одной из высот может быть разбит на два прямоугольных треугольника, элементы которых находятся в более простой зависимости, чем элементы произвольного треугольника.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 9.1), имеющих равный острый угол $\angle A = \angle A_1 = \alpha$. Обозначив стороны треугольников через a, b, c, a_1, b_1, c_1, на основания подобия этих треугольников можем записать, что

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Если взять еще какой-нибудь прямоугольный треугольник с острым углом α и сторонами a_2, b_2, c_2, то, очевидно, и для него будут сохраняться вышезаписанные соотношения, т. е.

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} \text{ и т. д.}$$

Отсюда можно сделать заключение, что в прямоугольном треугольнике, имеющем данный острый угол α, отношение его сторон не зависит от размеров сторон треугольника.

Если величина угла α меняется, то соотношения остаются справедливыми, только лишь меняется их числовое значение. Следовательно, отношения $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ и т. д. являются функциями острого угла прямоугольного треугольника.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$ (рис. 9.2). Пусть $\angle A = \alpha$.

Во всяком прямоугольном треугольнике:

отношение катета, противолежащего данному углу, к гипотенузе называется синусом (обозначается sin) этого угла

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \tag{9.1}$$

отношение катета, прилежащего к острому углу, к гипотенузе называется косинусом (cos) этого угла

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \tag{9.2}$$

отношение катета, противолежащего данному углу, к катету прилежащему называется тангенсом (tg) этого угла

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \tag{9.3}$$

отношение катета, прилежащего к данному острому углу, к катету противолежащему называется котангенсом (ctg) этого угла

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{9.4}$$

Аналогично можно записать и тригонометрические функции угла B. Пусть $\angle B = \beta$. Тогда

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Иногда употребляются еще функции секанс (sec) и косеканс (cosec) угла.

Секансом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к прилежащему к этому углу катету, т. е.

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}, \quad \sec\beta = \frac{c}{a}. \tag{9.5}$$

Косекансом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к противолежащему этому углу катету, т. е.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{cosec}\beta = \frac{c}{b}. \tag{9.6}$$

Очевидно,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{9.7}$$

Полезно (даже необходимо) знать значения тригонометрических функций некоторых углов, наиболее часто встречающихся в задачах. Значения их даны в табл. 1.*

Таблица 1

Углы α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Решение прямоугольных треугольников. Решить треугольник — это значит по известным элементам треугольника найти все основные его элементы, а именно, найти все углы, стороны и площадь.

Известно, что треугольник вполне определен, если известны три его элемента, среди которых хотя бы один не является углом. Но поскольку в прямоугольном треугольнике один элемент всегда известен (прямой угол), то для его решения достаточно знать еще два каких-либо элемента, среди которых хотя бы один не является углом.

Рассмотрим основные случаи решения прямоугольных треугольников.

Пусть в прямоугольном $\triangle ABC$ (рис. 9.2) известны гипотенуза $AB = c$ и $\angle A = \alpha$. Требуется определить основные элементы этого треугольника.

* Ее легко составить, если рассмотреть треугольник с катетами, равными 1 и $\sqrt{3}$, и гипотенузой, равной 2.

Поскольку $\angle A$ и $\angle B$ в сумме составляют 90°, то $\angle B = 90° - \alpha$.

Из равенств (9.1) и (9.2) находим катеты

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$

Площадь S равна

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2}.$$

Аналогично решается треугольник, если заданы острый угол и катет. Пусть, например, известен $\angle A = \alpha$ и катет $AC = b$. Тогда $\angle B = 90° - \alpha$. Из равенства (9.2) $c = \frac{b}{\cos \alpha}$.

Катет BC можно найти либо по теореме Пифагора, либо из формул (9.1) и (9.3).

Пусть теперь известны две стороны, например, катет $AC = b$ и гипотенуза $AB = c$.

Согласно формуле (9.2) $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Зная косинус угла, по таблицам тригонометрических функций можем найти сам угол. Другой угол будет равен $90° - \alpha$. Другой неизвестный катет a легко находится либо по теореме Пифагора, либо из формул (9.1) и (9.3).

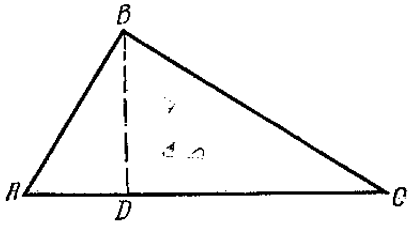


Рис. 9.3.

3. Решение косоугольных треугольников. Решение таких треугольников всегда можно свести к решению двух прямоугольных треугольников, на которые высота делит этот треугольник. Покажем это на примере.

Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 9.3) известны сторона $AB = c$ и углы $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Требуется найти основные элементы треугольника.

С вершины B на сторону AC проведем высоту BD. Получим два прямоугольных треугольника $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$. В $\triangle ABD$ известны гипотенуза $AB = c$ и острый $\angle A = \alpha$. Следовательно, на основании предыдущего параграфа $BD = c \sin \alpha$, $AD = c \cos \alpha$.

В $\triangle BDC$ известны катет BD и $\angle C = 180° - (\alpha + \beta)$. Поэтому

$$BC = \frac{BD}{\sin \angle C}, \quad CD = BD \operatorname{ctg} \angle C.$$

Но $AC = AD + CD$. Таким образом найдены все углы и стороны произвольного $\triangle ABC$.

Аналогично решаются косоугольные треугольники и в случаях, когда заданы другие его элементы.

Иногда решение косоугольных треугольников значительно упрощается, если использовать некоторые теоремы, которые имеют место в любом треугольнике. Приведем эти теоремы.

Теорема синусов. Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих им углов.

Если обозначить через a, b, c стороны треугольника, через A, B, C — противолежащие им углы и через R — радиус описанной около треугольника окружности, то теорема синусов запишется в виде

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \tag{9.8}$$

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Теорема тангенсов. Сумма двух сторон треугольника так относится к их разности, как тангенс полусуммы противолежащих им углов к тангенсу полуразности этих углов, т. е.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}. \tag{9.10}$$

Аналогичные формулы можно написать и для двух других пар сторон треугольника.

Очень часто для нахождения площади треугольника используется следующая теорема: площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними, т. е.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B. \tag{9.11}$$

Приведем один пример решения косоугольных треугольников с использованием указанных теорем.

Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 9.3) известны две стороны $AB = c$, $AC = b$ и $\angle B$. Требуется определить сторону a, углы $\angle B$ и $\angle C$ и площадь.

На основании теоремы синусов

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b}.$$

Тогда $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$ и по теореме косинусов

$$BC^2 = a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \angle A.$$

По найденным элементам нетрудно найти и площадь.

Аналогично решаются косоугольные треугольники в остальных случаях.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 9.1. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен α. На какие отрезки гипотенуза c делится высотой, опущенной из вершины прямого угла?

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 9.4) $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $CD \perp AB$. Требуется определить AD и BD.

Обозначим $AD = x$. Тогда $BD = c - x$.

Из прямоугольного $\triangle ACD$

$$\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg} \angle A \text{ и } CD = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle BCD$

$$\frac{CD}{BD} = \operatorname{tg} \angle B, \text{ но } \angle B = 90° - \angle A.$$

Поэтому $CD = (c - x) \operatorname{tg} (90° - \alpha)$.

Приравнивая правые части двух полученных равенств, имеем

$$x \operatorname{tg} \alpha = (c - x) \operatorname{tg} (90° - \alpha),$$

откуда

$$x = \frac{c \operatorname{tg} (90° - \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (90° - \alpha)}, \quad c - x = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (90° - \alpha)}.$$

Итак,

$$AD = \frac{c \operatorname{tg} (90° - \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (90° - \alpha)}, \quad BD = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (90° - \alpha)}.$$ *

---

* При решении геометрических задач обычно стараются ответ привести к виду, удобному для логарифмирования. Этот вопрос мы более детально рассмотрим, когда подробно ознакомимся с основными тригонометрическими соотношениями.

№ 9.2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, один из острых углов α. Найти проекции высоты, опущенной из вершины прямого угла, на катеты.

Р е ш е н и е. В $\triangle ABC$ (рис. 9.4) проведем $DM \perp BC$ и $DN \perp AC$. Требуется определить MC и NC, если $AB = c$, $\angle A = \alpha$.

Используя результаты предыдущей задачи, находим

$$CA = AD \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{c \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)},$$

так как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \text{ а } \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\angle B = \frac{AC}{BC}, \text{ то}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 1 \text{ и } CD = \frac{c}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}.$$

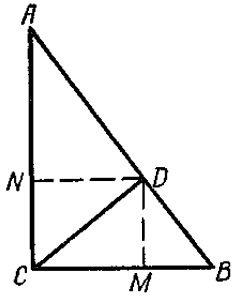


Рис. 9.4.

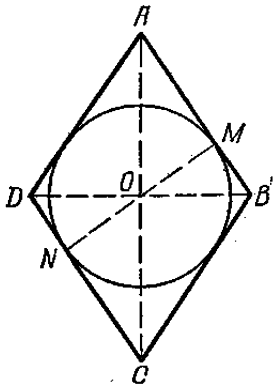


Рис. 9.5.

В $\triangle CDM$ $\angle DCM = \angle A = \alpha$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Поэтому

$$\frac{CM}{CD} = \cos\alpha \text{ и } CM = CD\cos\alpha = \frac{c\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}.$$

В $\triangle NCD$ $\angle NDC = \alpha$ и поэтому

$$\frac{NC}{CD} = \sin\alpha \text{ и } NC = CD\sin\alpha = \frac{c\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}.$$

№ 9.3. Вокруг круга радиуса r описан ромб, острый угол которого равен α. Определить периметр и площадь ромба.

Р е ш е н и е. Пусть $OM = r$ (рис. 9.5), $\angle DAB = \alpha$. Для определения периметра ромба необходимо знать его сторону.

Из прямоугольного $\triangle OAM$ ($\angle OMA = 90°$)

$$\frac{AM}{OM} = \operatorname{ctg} \angle OAM.$$

Но $\angle OAM = \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $AM = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

В $\triangle OBM$ $\angle MOB = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$\frac{MB}{OM} = \operatorname{tg} \angle MOB \text{ и } MB = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$AB = AM + MB = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Следовательно, периметр равен

$$4r\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

Площадь ромба найдем как произведение основания AB на высоту MN

$$S = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) 2r = 2r^2\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right).$$

№ 9.4. Периметр ромба равен p, а сумма диагоналей — m. Определить тупой угол ромба.

Р е ш е н и е. Воспользуемся рис. 9.5. Пусть $4AB = p$, $AC + BD = m$. Требуется определить $\angle ABC$. Сторона ромба $AB = \frac{p}{4}$, $AO + OB = \frac{m}{2}$. Обозначим $AO = x$. Тогда

$$OB = \frac{m}{2} - x.$$

Из прямоугольного $\triangle AOB$ по теореме Пифагора имеем

$$x^2 + \left(\frac{m}{2} - x\right)^2 = \frac{p^2}{16}. \text{ Откуда } x = \frac{m \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - m^2}}{4}$$

$$\text{и } \frac{m}{2} - x = \frac{m \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - m^2}}{4}.$$

Но $\frac{x}{\frac{m}{2} - x} = \operatorname{tg} \angle ABO$. Зная $\operatorname{tg} \angle ABO$, по таблицам тригонометрических функций находим $\angle ABO$. Искомый же $\angle ABC = 2 \angle ABO$.

№ 9.5. Определить площадь равнобедренного треугольника, если прямая, соединяющая середину основания и боковой стороны, равна половине радиуса R описанного круга.

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 9.6) $AB = BC$, $BM = MC$, $AD = CD$, $MD = \frac{R}{2}$, где R — радиус описанного круга. Требуется определить площадь треугольника ABC.

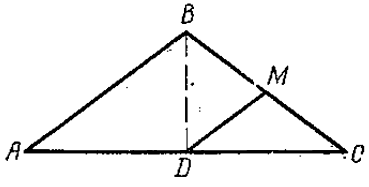


Рис. 9.6.

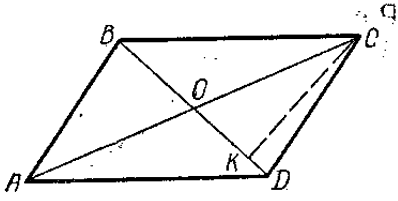


Рис. 9.7.

Отрезок MD является средней линией $\triangle ABC$. Поэтому $AB = 2MD = R$. Но $BC = AB = R$.

По теореме синусов имеем $\frac{AB}{\sin C} = 2R$ или $\frac{R}{\sin C} = 2R$. Поэтому

$$\sin C = \frac{1}{2} \text{ и } \angle C = 30°.$$

Из прямоугольного $\triangle BCD$

$$\frac{BD}{BC} = \sin \angle C,\ BD = \frac{R}{2},$$

$$\frac{CD}{BC} = \cos \angle C,\ CD = \frac{R\sqrt{3}}{2},\ AC = 2CD = R\sqrt{3},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

№ 9.6. Определить площадь параллелограмма, если его диагонали равны d_1 и d_2 и угол между ними равен α.

Р е ш е н и е. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 9.7) $BD = d_1$, $AC = d_2$, $\angle COD = \alpha$. Требуется определить площадь параллелограмма.

$$\triangle ABD = \triangle BCD.$$

Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна удвоенной площади $\triangle BCD$. Проведем в $\triangle BCD$ высоту CK.

Тогда $S_{\triangle BCD} = \frac{BD \cdot CK}{2}$. Но $BD = d_1$, а из прямоугольного $\triangle COK$ $CK = CO \sin \angle COK = \frac{d_2 \sin \alpha}{2}$.

Следовательно,

$$S_{\triangle BCD} = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}, \text{ а } S_{ABCD} = d_1 d_2 \sin\alpha.$$

№ 9.7. В окружность радиуса R вписан четырехугольник, диагональ которого AC является диаметром круга и образует со стороной AB угол 30°, а со стороной AD — угол 45°. Найти длину диагонали BD.

Р е ш е н и е. $\triangle ABC$ — прямоугольный, т. к. вписанный $\angle ABC$ опирается на диаметр (рис. 9.8). $\angle BAC = 30°$. Поэтому

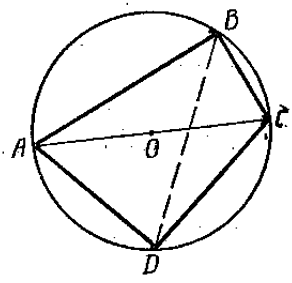


Рис. 9.8.

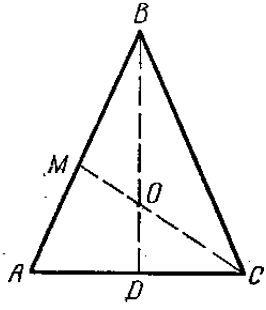


Рис. 9.9.

$BC = \frac{1}{2} AC = R$. $\angle ADC$ — прямоугольный ($\angle ADC = 90°$) и равнобедренный, так как $\angle DAC = 45°$.

Поэтому легко находим $AD = DC = R\sqrt{2}$.

Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный в окружность, то противоположные углы его в сумме дают 180°. Поэтому

$$\angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - 75° = 105°.$$

Из $\triangle BDC$ по теореме косинусов находим

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD =$$

$$= R^2 + 2R^2 - 2\sqrt{2}R^2 \cos 105° = R^2 (3 - 2\sqrt{2} \cos 105°).$$

Следовательно,

$$BD = R\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos 105°}.$$

Можно показать, что $3 - 2\sqrt{2} \cos 105° = 2 + \sqrt{3}$. Поэтому окончательно получим

$$BD = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

№ 9.8. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить основание треугольника и радиус описанного круга.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC (рис. 9.9) $AB = BC$, $\angle A = \alpha$.

Как известно, центр вписанного круга находится в точке пересечения биссектрис. Высота, опущенная на основание, является в равнобедренном треугольнике одновременно и биссектрисой. Поэтому, если провести биссектрису CM угла C при основании, то точка O является центром вписанной окружности, а OD — ее радиусом.

Согласно условию задачи $BD - OD = BO = m$. Требуется определить основание AC треугольника и радиус R описанного круга.

В $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C = \alpha$. Следовательно, $\angle B = 180° - 2\alpha$.

Но тогда $\angle OBC = 90° - \alpha$, $\angle OCB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BOC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Из $\triangle BOC$ по теореме синусов следует

$$\frac{BC}{\sin \angle BOC} = \frac{BO}{\sin \angle BCO}, \quad BC = \frac{m \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольного $\triangle BDC$ —

$$\frac{CD}{BC} = \cos \angle BCD, \; CD = \frac{m \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Но

$$AC = 2CD = \frac{2m \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Для нахождения радиуса R описанной окружности воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R; \quad R = \frac{m \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}.$$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ЗАНЯТИЕ ДЕСЯТОЕ
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Теоретический материал

1. Определение положения плоскости. Плоскостью называется поверхность, обладающая следующими свойствами: а) если две точки прямой принадлежат поверхности, то и каждая точка этой прямой принадлежит этой же поверхности; б) если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку; в) через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Пользуясь последним свойством можно доказать, что: а) через прямую и точку вне этой прямой можно провести плоскость и притом только одну; б) через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну; в) через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.

2. Параллельные прямые и плоскости. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Существуют две теоремы, которые выражают признаки параллельности прямой с плоскостью.

Если прямая и плоскость перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.

Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в плоскости, то она параллельна этой плоскости.

3. Параллельные плоскости. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Следующие две теоремы выражают признаки параллельности двух плоскостей.

Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Так на рис. 10.1, если $AB \parallel A'B'$, а $CD \parallel C'D'$, то плоскость P параллельна плоскости Q.

Параллельные плоскости обладают следующими свойствами:

если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны;

если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой плоскости;

отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны.

4. Параллельные и скрещивающиеся прямые. Две прямые в пространстве могут располагаться так, что они не будут пересекаться, сколько бы их ни продолжали. При этом прямые могут быть параллельны, а могут и не быть параллельны.

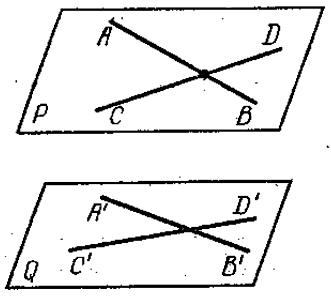


Рис. 10.1.

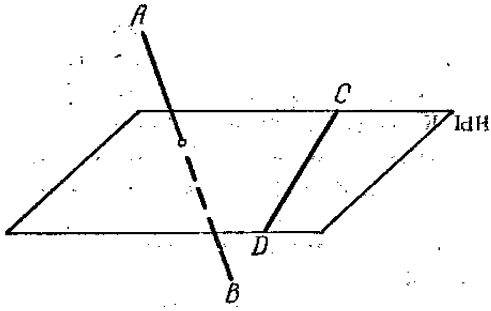


Рис. 10.2.

Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Эти две теоремы выражают признаки параллельности прямых в пространстве. Имеет место следующая теорема: два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях.

Известно, что через две параллельные прямые всегда можно провести плоскость (см. п. 1).

Две прямые, через которые нельзя провести плоскость, называются скрещивающимися. Примером скрещивающихся прямых могут быть две такие прямые, одна из которых пересекает какую-то плоскость, а другая лежит в этой плоскости, и не проходит через точку пересечения первой прямой с плоскостью (рис. 10.2).

Под углом между скрещивающимися прямыми понимают угол, который получится, если из произвольной точки пространства провести прямые, параллельные данным прямым и одинаково с ними направленные.

5. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она пересекается с плоскостью и образует прямой угол со всякой прямой, проведенной

на плоскости через их точку пересечения. Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью называется основанием перпендикуляра.

Существует теорема: если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна к двум прямым, проведенным на плоскости через точку пересечения прямой и плоскости, то она перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной на плоскости через эту точку.

Через всякую точку пространства можно провести перпендикуляр к данной плоскости и притом только один.

Прямая, пересекающаяся с плоскостью, но не перпендикулярная к ней, называется наклонной к этой плоскости. Точка пересечения наклонной с плоскостью называется основанием наклонной.

Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и несколько наклонных, то:

а) наклонные, имеющие равные проекции *, равны;

б) среди неравных наклонных та больше, проекция которой больше.

Справедлива и обратная теорема: если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то равные наклонные имеют равные проекции, и среди неравных проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.

Очень часто применяется следующая теорема, которая называется теоремой о трех перпендикулярах.

Теорема. Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции, перпендикулярна и к самой наклонной, т. е., если (рис. 10.3) CD — проекция наклонной MC на плоскости P и $AB \perp CD$, то $AB \perp MC$.

Справедлива и обратная теорема: прямая AB, проведенная на плоскости P через основание наклонной MC перпендикулярно к этой наклонной, перпендикулярна и к ее проекции CD.

Под углом между плоскостью и прямой, которая пересекает эту плоскость, понимают угол между прямой и ее проекцией ** на эту плоскость. Этот угол имеет то свойство, что он наименьший среди всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведенными на плоскости через основание наклонной.

6. Двугранные углы. Перпендикулярные плоскости. Фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой

---

* Проекцией наклонной на плоскость называется отрезок прямой, проведенной на плоскости между основаниями перпендикуляра и наклонной.

** Проекцией прямой на плоскость называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных со всех точек этой прямой на плоскость. Очевидно, проекция прямой есть также прямая линия.

называется двугранным углом (рис. 10.4). Прямая AB называется ребром, а полуплоскости P и Q — сторонами или гранями двугранного угла.

Если из произвольной точки M ребра AB восстановить в каждой грани перпендикуляры MK и MN к ребру, то полученный угол KMN называется линейным углом двугранного угла.

Два двугранных угла называются равными, если они при вложении совмещаются. Если же двугранные углы не равны, то тот считается меньшим, который составляет часть другого.

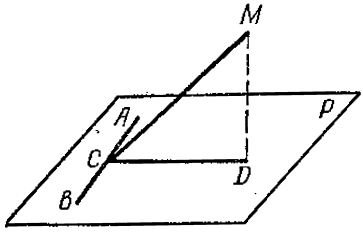


Рис. 10.3.

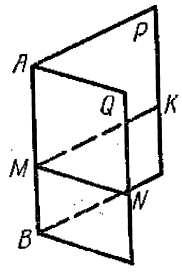


Рис. 10.4.

Подобно углам в планиметрии существуют смежные и вертикальные двугранные углы.

Если два смежных двугранных угла равны, то каждый из них называется прямым двугранным углом.

Между двугранными и соответствующими им линейными углами существует следующая зависимость:

равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы;

большему двугранному углу соответствует больший линейный угол.

И обратно:

равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы;

большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.

Две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если при пересечении они образуют прямые двугранные углы.

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Эта теорема выражает признак перпендикулярности двух плоскостей.

Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости, есть перпендикуляр к этой плоскости.

7. Многогранные углы. Фигура, образованная тремя лучами, исходящими из одной точки и не лежащими в одной плоскости, и тремя частями плоскостей, заключенными между этими лучами, называется трехгранным углом (рис. 10.5).

Точка O называется вершиной, лучи OA, OB и OC — ребрами, плоскости OAB, OAC, OCB — гранями трехгранного угла. Углы AOB, AOC, COB называются плоскими углами трехгранного угла.

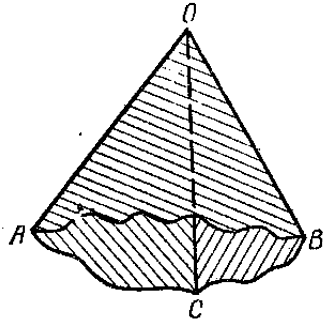


Рис. 10.5.

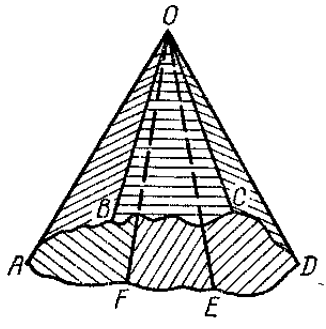


Рис. 10.6.

Во всяком трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, но больше их разности.

Трехгранные углы равны, если они имеют:

а) соответственно равные плоские углы, или

б) по равному двугранному углу, который расположен между двумя равными и одинаково расположенными плоскими углами, или

в) по равному плоскому углу, который расположен между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.

Несколько плоскостей, пересекающихся в одной точке, образуют фигуру, которая называется многогранным углом (рис. 10.6). Для многогранного угла сохраняются все определения, данные для трехгранного угла.

Многогранный угол называется выпуклым, если он целиком лежит по одну сторону от каждой своей грани, неограниченно продолженной.

Во всяком выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше $4d$.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 10.1. Из некоторой точки на плоскость опущен перпендикуляр и проведены две наклонные, которые составляют с перпендикуляром углы по 45°, а между собой — угол 60°. Найти угол между проекциями этих наклонных.

Р е ш е н и е. Пусть из точки M к плоскости S (рис. 10.7) проведены перпендикуляр AM и наклонные BM и CM.

$$\angle AMC = \angle AMB = 45°, \quad \angle CMB = 60°.$$

Требуется определить $\angle BAC$.

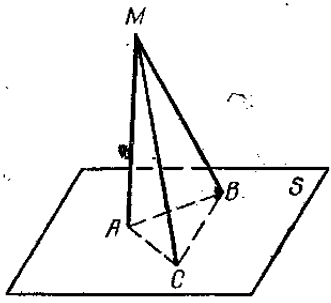


Рис. 10.7.

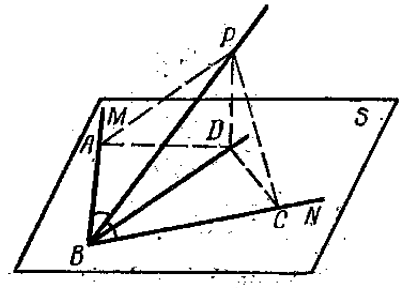


Рис. 10.8.

Прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения перпендикуляра с плоскостью. Поэтому $\angle CAM = \angle BAM = 90°$. Следовательно, прямоугольные треугольники $\triangle CAM$ и $\triangle BAM$ — равнобедренные и $AB = AM$, $AC = AM$, откуда $AC = AB$. Наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой. Поэтому $MC = MB$. $\triangle CMB$ — равносторонний, поскольку он равнобедренный и угол при вершине равен 60°, т. е. $MC = MB = BC$.

Рассмотрим $\triangle AMC$ и $\triangle ABC$. У них AC — общая сторона, $MC = BC$, как стороны равностороннего $\triangle MBC$, $AM = AB$. Следовательно, $\triangle AMC = \triangle ABC$. Но в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Поэтому $\angle CAB = \angle MAC = 90°$.

№ 10.2. Из вершины угла, лежащего на плоскости, проведена к этой плоскости наклонная так, что она составляет равные углы со сторонами угла. Доказать, что проекция этой наклонной есть биссектриса данного угла.

Р е ш е н и е. Пусть BP (рис. 10.8) — наклонная к плоскости S, $\angle PBM = \angle PBN$. Требуется доказать, что $\angle DBM = \angle DBN$.

Опустим из точки P на плоскость перпендикуляр PD и проведем $PA \perp BM$ и $PC \perp BN$. Тогда согласно теореме о трех перпендикулярах проекции наклонных PC и PA будут перпендикулярны соответственно прямым BN и BM т. е. $DC \perp BN$ и $DA \perp BM$.

Прямоугольные треугольники $\triangle PBC$ и $\triangle PBA$ равны, так как они имеют общую гипотенузу PB и равный острый угол $\angle PBA = \angle PBC$. Из их равенства следует $PC = PA$, но тогда и $DC = DA$ как проекции равных наклонных. Следовательно $\triangle ABD = \triangle BDC$ как прямоугольные треугольники с равными гипотенузой и катетом (BD — общая гипотенуза, $AD = CD$).

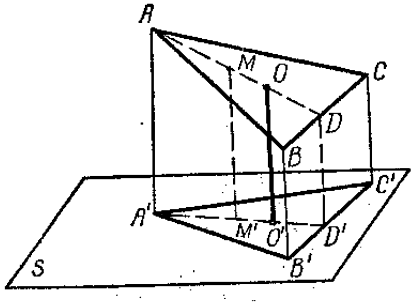


Рис. 10.9.

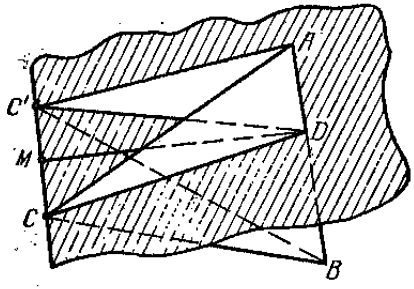


Рис. 10.10.

Из равенства треугольников следует $\angle ABD = \angle CBD$, т. е. BD — биссектриса $\angle ABC$.

№ 10.3. Доказать, что расстояние центра тяжести треугольника до плоскости, не совпадающей с плоскостью треугольника, равно одной трети суммы расстояний вершин треугольника до этой плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 10.9). O — центр тяжести $\triangle ABC$. A', B', C', O' — проекции соответственно точек A, B, C, O на плоскость S. Требуется доказать, что

$$OO' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}.$$

Сделаем следующие дополнительные построения. Из точки D и из середины M отрезка AO опустим перпендикуляры DD' и MM' на плоскость S. Прямые AA', BB', CC', DD', OO', MM' будут параллельны между собой, как прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости S. Причем проекции A', M', O' и D' точек A, M, O, D будут лежать на одной прямой $A'D'$, как проекции точек прямой AD.

Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан. Поэтому AD — медиана $\triangle ABC$, т. е. $BD = CD$ и $AO = 2OD$. Следовательно, DD' — средняя линия трапеции $BCC'B'$, а поэтому $DD' = \frac{BB' + CC'}{2}$.

Аналогично находим

$$MM' = \frac{AA' + OO'}{2}, \quad OO' = \frac{MM' + DD'}{2}.$$

Подставляя в последнее равенство вместо MM' и DD', их выражения из предыдущих равенств

$$OO' = \frac{AA' + OO' + BB' + CC'}{4}$$

и решая полученное равенство относительно OO', получим $OO' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$, ч. т. д.

№ 10.4. Два равносторонних треугольника имеют общую сторону a. Расстояние между их третьими вершинами составляет одну треть стороны a. Найти кратчайшее расстояние между их общей стороной и линией, соединяющей третьи вершины.

Р е ш е н и е. Пусть даны два равносторонних треугольника ABC и ABC' (рис. 10.10) со стороной $AB = a$. $CC' = \frac{a}{3}$. Через отрезок CC' проведем плоскость, перпендикулярную стороне AB, и через точку D пересечения плоскости со стороной AB проведем $DM \perp CC'$. Очевидно, DM и есть то расстояние, которое нужно определить.

Прямая, перпендикулярная к плоскости, будет перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения перпендикуляра с плоскостью. На основании этой теоремы $CD \perp AB$ и $C'D \perp AB$. Поэтому $\triangle C'DC$ — равнобедренный, т. к. $C'D = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, как высоты равносторонних треугольников со стороной a. Дальше следует, что $C'M = CM$ ибо MD — высота равнобедренного $\triangle CDC'$. Но $CC' = \frac{a}{3}$, поэтому $MC = \frac{a}{6}$ и из прямоугольного $\triangle MCD$ находим

$$MD = \sqrt{CD^2 - MC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{36}} = \frac{a}{6}\sqrt{26}.$$

№ 10.5. Расстояния от концов отрезка до плоскости равны a и b. Найти расстояние до этой же плоскости от точки отрезка, которая делит его в отношении $m : n$.

Р е ш е н и е. Пусть $AA' = a$, $BB' = b$, $AD : BD = m : n$. Определить DD' (рис. 10.11).

Через точку A проведем плоскость S, параллельную плоскости P. В четырехугольнике $AA'B'B''$ $AA' \parallel B''B'$, как перпендикуляры к одной плоскости P, и $AA' = B''B'$ как отрезки параллельных прямых, отсекаемых параллельными плоскостями. Следовательно, $AA'B'B''$ — прямоугольник и $A'B' = AB''$.

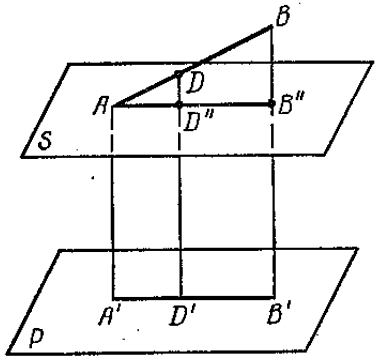


Рис. 10.11.

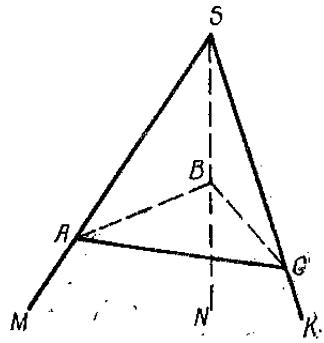


Рис. 10.12.

Из подобных треугольников ABB'' и ADD'' имеем

$$\frac{BB''}{DD''} = \frac{AB}{AD},$$

откуда

$$DD'' = \frac{BB'' \cdot AD}{AB} = \frac{(b-a)m}{m+n}.$$

Но

$$DD' = DD'' + D''D' = a + \frac{(b-a)m}{m+n} = \frac{an+bm}{m+n}.$$

№ 10.6. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найти величину двугранного угла между плоскостями плоских углов в 45°.

Р е ш е н и е. Пусть в трехгранном угле, изображенном на рис. 10.12, $\angle MSK = 60°$, $\angle MSN = \angle NSK = 45°$. Требуется определить величину двугранного угла SN.

Двугранный угол измеряется своим линейным углом. Поэтому построим линейный угол двугранного угла. Для этого через произвольную точку B ребра SN проведем плоскость, перпендикулярную SN и соединим точку B с точками C и A пересечения секущей плоскости с ребрами SK и SM.

Очевидно, $SB \perp AB$ и $SB \perp BC$. Поэтому $\triangle ASB$ и $\triangle CSB$ — прямоугольные и равнобедренные. Следовательно, $AB = SB = BC$. Если обозначить $AB = BC = a$, то по теореме Пифагора нетрудно найти, что $AS = CS = a\sqrt{2}$. Но $\triangle ASC$ — равносторонний, так как $AS = SC$ и $\angle ASC = 60°$. Следовательно, $AC = a\sqrt{2}$.

Итак, в $\triangle ABC$ $AB = BC = a$, $AC = a\sqrt{2}$, т. е. $\angle ABC = 90°$. Но $\angle ABC$ есть линейный угол двугранного угла SB. Следовательно, искомый двугранный угол — прямой.

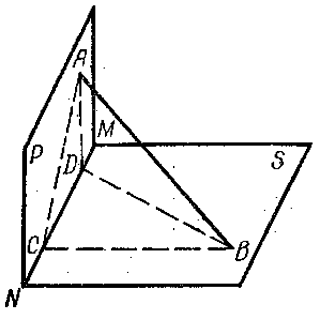


Рис. 10.13.

№ 10.7. Отрезок прямой, равный a, опирается своими концами на грани прямого двугранного угла, образуя с каждым из них угол α. Определить его проекцию на ребро двугранного угла.

Р е ш е н и е. Пусть двугранный угол MN — прямой, (рис. 10.13), $AB = a$. Отрезок AB с плоскостями P и S образует $\angle \alpha$. Проведем $BC \perp MN$ и $AD \perp MN$. Угол между прямой и плоскостью это угол между прямой и проекцией ее на плоскость. Поэтому угол между отрезком AB и плоскостью P будет $\angle BAC$, так как точка C является проекцией точки B на плоскость P, следовательно, $\angle BAC = \alpha$. Угол между AB и плоскостью S будет равен углу ABD, поэтому $\angle ABD = \alpha$.

Требуется определить отрезок CD.

Из прямоугольного $\triangle ABD$ следует

$$\frac{BD}{AB} = \cos\alpha, \quad BD = AB\cos\alpha = a\cos\alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle ABC$ —

$$\frac{BC}{AB} = \sin\alpha, \quad BC = AB\sin\alpha = a\sin\alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle BCD$ по теореме Пифагора имеем

$$CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha} =$$

$$= a\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = a\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

ЗАНЯТИЕ ОДИННАДЦАТОЕ

МНОГОГРАННИКИ

Теоретический материал

1. Общие определения. Многогранником называется тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются его гранями, а стороны и вершины граней — ребрами и вершинами многогранника.

Отрезки прямых, соединяющие две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются диагоналями многогранника.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от каждой своей грани, неограниченно продолженной.

2. Призма. Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной и той же данной прямой (рис. 11.1).

Многоугольники $ABCDEFG$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями призмы. Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C, ... называются боковыми гранями, а их стороны AA_1, BB_1, CC_1, ... называются боковыми ребрами. У призмы все боковые ребра равны.

Перпендикуляр OO_1, опущенный из какой-либо точки одного основания на другое, называется высотой призмы.

Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. У прямой призмы боковые грани суть прямоугольники, а высоты равны боковому ребру.

Прямая призма называется правильной, если в основании ее лежат правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

3. Параллелепипед. Призма, основания которой — параллелограммы, называется параллелепипедом. Параллелепипеды бывают прямые и наклонные. Прямой параллелепипед называется прямоугольным, если в его основаниях лежат прямоугольники.

Три ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины, называются его измерениями.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.

В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны, все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

В прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

4. Пирамида. Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием,— многоугольник, а все ос-

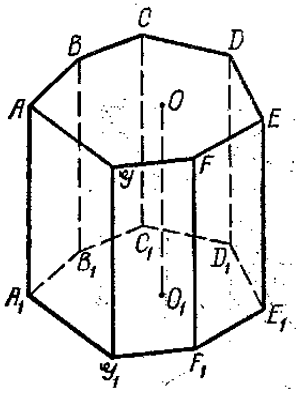


Рис. 11.1.

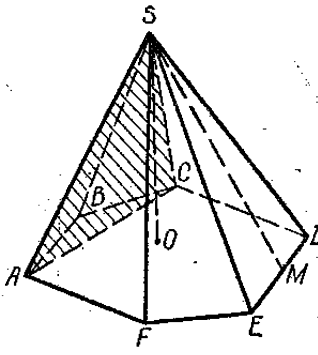


Рис. 11.2.

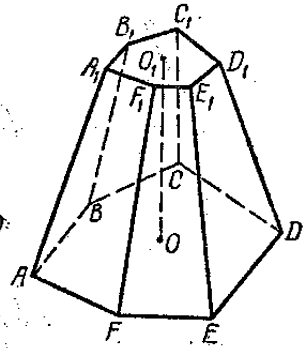


Рис. 11.3.

тальные грани, которые называются боковыми гранями,— треугольники, имеющие общую вершину (рис. 11.2).

Общая вершина S боковых треугольников называется вершиной пирамиды, а перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется высотой пирамиды.

Пирамида называется правильной, если в основании ее лежит правильный многоугольник, а высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые грани — равнобедренные треугольники. Высота SM такого треугольника называется апофемой пирамиды.

Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания, называется диагональной плоскостью (например, плоскость SAC на рис. 11.2).

Часть пирамиды, расположенной между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усеченной пирамидой (рис. 11.3). Параллельные многоугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ называются основаниями, а расстояние OO_1 между ними — высотой усеченной пирамиды.

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то: боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на про-

порциональные части; в сечении получается многоугольник, подобный основанию; площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 11.1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами углы α, β, γ. Доказать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

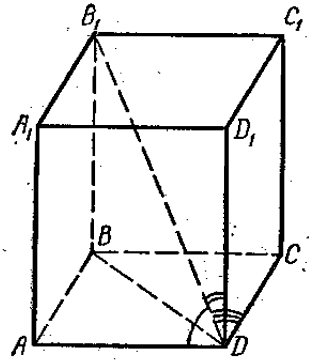


Рис. 11.4.

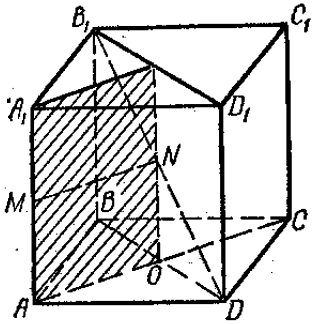


Рис. 11.5.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.4) — прямоугольный параллелепипед и пусть $\angle ADB_1 = \alpha$, $\angle B_1DD_1 = \beta$, $\angle B_1DC = \gamma$.

Так как параллелепипед прямоугольный, то $ABCD$ — прямоугольник, и из прямоугольного $\triangle ABD$ по теореме Пифагора

$$BD^2 = AB^2 + AD^2.$$

Из прямоугольного $\triangle B_1BD$

$$B_1D^2 = B_1B^2 + BD^2,$$

или

$$B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + B_1B^2.$$

Разделим обе части последнего равенства на B_1D^2

$$1 = \left(\frac{AB}{B_1D}\right)^2 + \left(\frac{AD}{B_1D}\right)^2 + \left(\frac{B_1B}{B_1D}\right)^2.$$

Но

$$\frac{AB}{B_1D} = \frac{CD}{B_1D} = \cos\gamma, \quad \frac{AD}{B_1D} = \cos\alpha, \quad \frac{B_1B}{B_1D} = \frac{D_1D}{B_1D} = \cos\beta.$$

Поэтому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

№ 11.2. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающим его ребром. Ребро куба равно a (рис. 11.5).

Р е ш е н и е. Пусть ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Требуется определить расстояние MN от ребра AA_1 до диагонали B_1D.

Через ребро AA_1 проведем плоскость, перпендикулярную диагональной плоскости BB_1D_1D, и через точку N пересечения этой плоскости с диагональю B_1D проведем $NM \perp B_1D$. NM и будет искомым расстоянием между ребром AA_1 и диагональю B_1D.

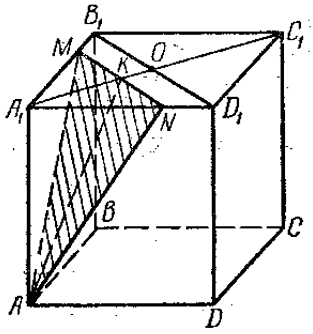


Рис. 11.6.

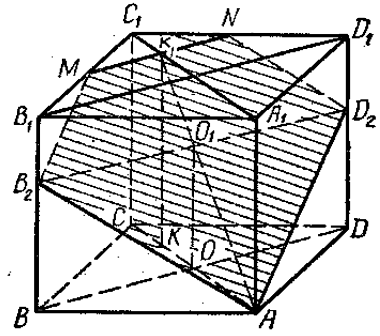


Рис. 11.7.

Нетрудно доказать, что четырехугольник $AMNO$ — прямоугольник и $MN = AO$. Но из прямоугольного $\triangle AOD$

$$AO = AD\frac{\sqrt{2}}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$MN = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

№ 11.3. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через одну из вершин куба и середины двух ребер, принадлежащих другому основанию. Ребро куба равно a.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая.

I случай. Пусть в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость через вершину A и середины M и N ребер A_1B_1 и A_1D_1. Требуется определить площадь $\triangle AMN$ (рис. 11.6). $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}\ MN \cdot AK$

(докажите, что AK — высота $\triangle AMN$). $MN = \frac{1}{2} B_1D_1 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ как средняя линия $\triangle A_1B_1D_1$.

Из прямоугольного $\triangle AA_1K$ $AK = \sqrt{AA_1^2 + A_1K^2}$. Но $AA_1 = a$, $A_1K = \frac{1}{4} A_1C_1 = a\frac{\sqrt{2}}{4}$. Поэтому $AK = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Теперь $S_{\triangle AMN} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{8}$.

II случай. Пусть секущая плоскость проходит через вершину A и середины N и M ребер C_1D_1 и B_1C_1.

Требуется определить площадь пятиугольника AB_2MND_2 (рис. 11.7).

Обозначим искомую площадь через S. Будем искать S, как сумму площадей трапеции B_2MND_2 (докажите, что это трапеция) и $\triangle AB_2D_2$.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, т. е.

$$S_{B_2MND_2} = \frac{MN + B_2D_2}{2} \cdot O_1K_1.$$

$B_2D_2 = B_1D_1 = a\sqrt{2}$, $MN = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ как средняя линия $\triangle B_1C_1D_1$. Высота $O_1K_1 = AK_1 - AO_1$. Из прямоугольного $\triangle AK_1K$ $AK_1 = \sqrt{AK^2 + K_1K^2}$. Но $K_1K = C_1C = a$, $AK = \frac{3}{4} AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ (докажите). Поэтому

$$AK_1 = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{8}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Из подобия $\triangle AKK_1$ и $\triangle AOO_1$ имеем $\frac{AK}{AO} = \frac{AK_1}{AO_1}$,

откуда

$$AO_1 = \frac{AO \cdot AK_1}{AK} = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Теперь

$$O_1K_1 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{a}{3}\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{a}{6}\sqrt{\frac{17}{2}}$$

и

$$S_{B_2MND_2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{6}\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{3a^2}{24}\sqrt{17},$$

$$S_{\triangle AB_2D_2} = \frac{1}{2} B_2D_2 \cdot AO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{a^2}{6}\sqrt{17}.$$

Тогда

$$S = S_{B_2MND_2} + S_{\triangle AB_2D_2} = \frac{3a^2}{24}\sqrt{17} + \frac{a^2}{6}\sqrt{17} = \frac{7a_2}{24}\sqrt{17}.$$

№ 11.4. Через вершину правильной треугольной пирамиды, ребро которой равно b и наклонено к плоскости основания под углом α, проведено сечение параллельно одной из сторон основания под углом β к плоскости основания. Определить площадь сечения.

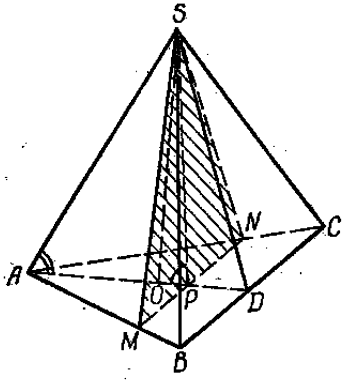


Рис. 11.8.

Р е ш е н и е. Пусть пирамида $SABC$ (рис. 11.8) — правильная. $AS = b$, $\angle SAO = \alpha$. Плоскость $\triangle SMN$ параллельна BC и наклонена к плоскости основания под углом β. Определить площадь $\triangle SMN$.

$\triangle ABC$ — равносторонний. Поэтому медиана $AD \perp BC$, а следовательно, и $AD \perp MN$, т. к. $MN \parallel BC$ (докажите). Согласно теореме о трех перпендикулярах отсюда следует, что $MN \perp SP$.

Так как $AP \perp MN$ и $SP \perp MN$, то $\angle APS$ является линейным углом двугранного угла между плоскостью основания и плоскостью сечения, т. е. $\angle APS = \beta$,

$$S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} MN \cdot SP.$$

Из прямоугольного $\triangle OSP$ $SP = \frac{SO}{\sin\beta}$. Но из прямоугольного $\triangle ASO$ $SO = AS \sin\alpha = b \sin\alpha$. Следовательно, $SP = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$. Из $\triangle ASO$ находим также $AO = AS \cos\alpha = b\cos\alpha$. Но точка O является точкой пересечения медиан, следовательно,

$$AD = \frac{3}{2} AO = \frac{3}{2} b\cos\alpha.$$

Зная высоту AD равностороннего $\triangle ABC$, нетрудно, найти его сторону BC. $BC = b\sqrt{3}\cos\alpha$.

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ следует, что $\frac{BC}{MN} = \frac{AD}{AP}$, откуда $MN = \frac{BC \cdot AP}{AD}$. Но $AP = AO + OP$. Из прямоугольного $\triangle OSP$ $OP = SP\cos\beta = b\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно,

$$AP = b\cos\alpha + b\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

и

$$MN = \frac{2b\sqrt{3}\cos\alpha\, b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\, 3b\cos\alpha} = \frac{2b\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

Искомая площадь равна

$$S_{\triangle SMN} = \frac{2b\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)\cdot b\sin\alpha}{2\sin\beta\sin\beta} = \frac{b^2\sqrt{3}\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}.$$

№ 11.5. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Определить угол, образованный боковыми ребрами и плоскостью основания.

Р е ш е н и е. Воспользуемся рис. 11.8. Пусть $\angle BSC = \alpha$. Требуется определить $\angle SAO = \varphi$. Из прямоугольного $\triangle SAO$ имеем

$$\cos\varphi = \frac{AO}{AS}.$$

Обозначим сторону AB основания через a. Тогда $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ как высота равностороннего $\triangle ABC$. $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, так как точка O — точка пересечения медиан. Из прямоугольного $\triangle BSD$ $BS = \frac{BD}{\sin\angle BSD}$. Но $\angle BSD = \frac{1}{2}\angle BSC$, так как $\triangle BSC$ — равнобедренный. Следовательно, $BS = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Но $BS = AS$

и

$$\cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{3a} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

№ 11.6. Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и b. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Определить площадь диагонального сечения.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная пирамида (рис. 11.9). $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $\angle A_1AC = \alpha$. Требуется определить площадь четырехугольника AA_1C_1C.

Четырехугольник AA_1C_1C — равнобочная трапеция (докажите).

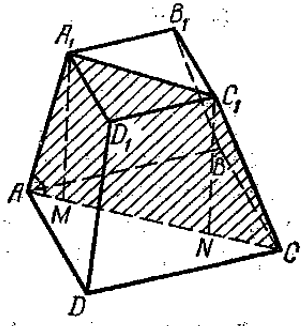


Рис. 11.9.

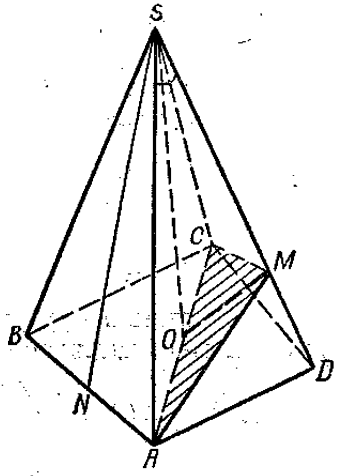


Рис. 11.10.

$A_1C_1 = b\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, как диагонали квадратов. Проведем $A_1M \perp AC$ и $C_1N \perp AC$. Тогда $S_{AA_1C_1C} = \frac{A_1C_1 + AC}{2} \cdot A_1M$. Из прямоугольного $\triangle AA_1M$ $A_1M = AM \operatorname{tg}\alpha$. Но $AM = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{a\sqrt{2} - b\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $A_1M = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}\operatorname{tg}\alpha$ и

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(a-b)}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

№ 11.7. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α и ребро основания равно a. Через диагональ основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру. Определить площадь полученного сечения.

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ (рис. 11.10) — правильная пирамида. $\angle ASD = \alpha$, $AD = a$. Плоскость $\triangle ACM$ перпендикулярна ребру SD. Требуется определить площадь $\triangle ACM$.

Проведем $SN \perp AB$. Тогда $AN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ и $\angle ASN = \frac{\alpha}{2}$ (так как $\triangle ASB$ — равнобедренный).

Из прямоугольного $\triangle ASN$

$$AS = \frac{AN}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ребро SD перпендикулярно плоскости $\triangle AMC$, следовательно, SD будет перпендикулярно любой прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через точку M. Поэтому $SM \perp AM$. Из прямоугольного $\triangle AMS$

$$AM = AS\sin\angle ASD = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha = a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $CM = AM = a\cos\frac{\alpha}{2}$, а $AC = a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата $ABCD$, то площадь $\triangle AMC$ можно найти по формуле Герона. Однако вычисления окажутся проще, если найти высоту OM, а

$$OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}},$$

и по формуле $S_{\triangle AMC} = \frac{AC \cdot OM}{2}$ вычислить искомую площадь

$$S_{\triangle AMC} = \frac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1} =$$
$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

ЗАНЯТИЕ ДВЕНАДЦАТОЕ

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

Теоретический материал

1. Цилиндр. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая движением прямой линии, перемещающейся в пространстве параллельно данной прямой и пересекающей при

этом данную линию. Движущаяся прямая называется образующей, а линия, вдоль которой движется образующая, называется направляющей.

Цилиндром называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями.

Часть цилиндрической поверхности, заключенной между параллельными плоскостями, называется боковой поверхностью. Части параллельных плоскостей, отсекаемые цилиндрической поверхностью, называются основаниями цилиндра. Расстояние между основаниями цилиндра называется его высотой.

Если образующие перпендикулярны к плоскости основания, цилиндр называется прямым. Прямой цилиндр называется круговым, если его основания — круги. Очевидно, сечение кругового цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг.

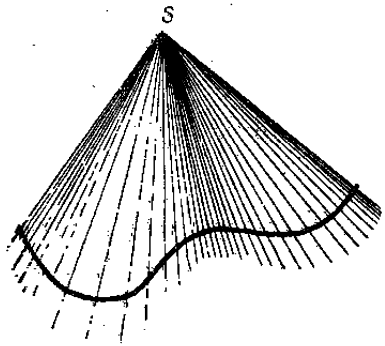


Рис. 12.1.

2. Конус. Конической поверхностью называется поверхность, описываемая движущейся прямой так, что при перемещении она постоянно проходит через неподвижную точку и пересекает некоторую данную линию (рис. 12.1). Движущаяся прямая называется образующей, точка S и линия, через которые проходят образующие, называются соответственно вершиной и направляющей конической поверхности.

Конусом называется тело, ограниченное частью замкнутой конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины.

Часть конической поверхности, отсекаемая плоскостью, называется боковой поверхностью, а часть плоскости, отсекаемая конической поверхностью,— основанием конуса.

Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется высотой конуса.

Конус называется прямым круговым, если его основание есть круг, а вершина проектируется в центр основания. Очевидно, сечение прямого конуса (кругового) плоскостью, параллельной основанию, есть круг.

В дальнейшем под словом конус, если специально не оговорено, будем понимать прямой круговой конус.

Часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усеченным конусом (рис. 12.2).

Параллельные круги называются его основаниями, а расстояние OO_1 между основаниями — высотой усеченного конуса.

3. Шар. Шаровой или сферической поверхностью называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром шара. Отрезок прямой, соединяющий центр с какой-нибудь точкой шаровой поверхности, назы-

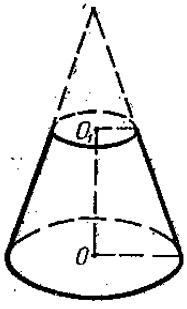


Рис. 12.2.

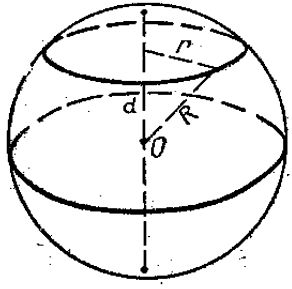


Рис. 12.3.

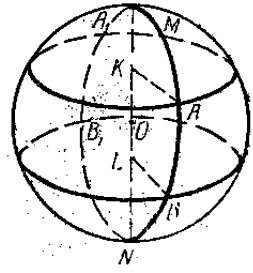


Рис. 12.4.

вается радиусом. Отрезок прямой, соединяющий две точки шаровой поверхности, называется хордой. Хорда, проходящая через центр, называется диаметром.

Шаровую поверхность можно определить еще как поверхность, образованную вращением полуокружности вокруг диаметра.

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется шаром или сферой.

Всякое сечение шара есть круг, причем радиус этого круга определяется по формуле

$$r = \sqrt{R^2 - d^2},$$

где r — радиус круга; R — радиус шара; d — расстояние секущей плоскости от центра (рис 12.3).

Сечения шара плоскостью обладают следующими свойствами:

а) сечения, равноотстоящие от центра, равны;

б) из двух сечений, неодинаково удаленных от центра шара, то, которое ближе к центру, имеет больший радиус;

в) наибольший радиус имеет то сечение, которое проходит через центр шара. В этом случае сечение имеет радиус, равный радиусу шара, а само сечение называется большим кругом.

Через две точки шаровой поверхности, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и только одну.

Часть шаровой поверхности, отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью, называется сегментной поверхностью. (На рис. 12.4 — часть шаровой поверхности, лежащей выше круга с диаметром AA_1).

Окружность AA_1 называется основанием, а отрезок KM радиуса — высотой сегментной поверхности.

Часть шаровой поверхности, заключенной между двумя параллельными секущими плоскостями AA_1 и BB_1 (рис. 12.4), называется шаровым поясом или зоной.

Окружности сечения AA_1 и BB_1 называются основаниями, а расстояние KL между параллельными плоскостями — высотой пояса.

Плоскость, имеющая с шаровой поверхностью только одну общую точку, называется касательной плоскостью.

Плоскость, перпендикулярная к радиусу в конце его, лежащем на поверхности шара, есть касательная плоскость.

Справедлива и обратная теорема: касательная плоскость перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

4. Поверхности вращения. Поверхностью вращения называется поверхность, которая получается от вращения какой-нибудь линии вокруг неподвижной прямой.

Линия, которая вращается, называется образующей, а прямая, вокруг которой вращается образующая, называется осью вращения.

Любая плоскость, перпендикулярная к оси, пересекаясь с поверхностью вращения, дает в сечении окружность.

Всякая секущая плоскость, проходящая через ось, называется меридиональной плоскостью, а линия ее пересечения с поверхностью вращения — меридианом. Очевидно, все меридианы равны между собой.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 12.1. Определить угол между диагоналями осевого сечения прямого кругового * цилиндра, если развертка боковой поверхности цилиндра есть квадрат.

Р е ш е н и е. Если боковую поверхность цилиндра разрезать по образующей и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность лежала в одной плоскости, то получим фигуру, которая называется раз-

* В дальнейшем под словом цилиндр будем понимать прямой круговой цилиндр.

верткой боковой поверхности цилиндра. Очевидно, развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра есть прямоугольник со сторонами H и $2\pi R$, где H и R соответственно высота и радиус основания цилиндра.

Осевым сечением цилиндра называется сечение, проходящее через ось цилиндра. На рис. 12.5 $ABDC$ — осевое сечение. Требуется определить $\angle AMB = \varphi$.

В прямоугольном $\triangle OMB$ $\angle OMB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{\varphi}{2}$ (докажите).

Поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{OB}{OM} = \frac{2R}{H}.$$

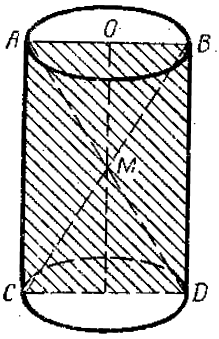


Рис. 12.5.

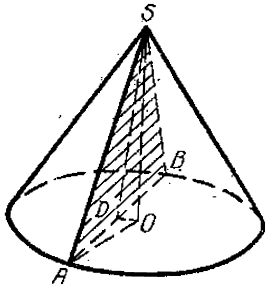


Рис. 12.6.

Поскольку развертка боковой поверхности есть квадрат, то $2\pi R = H$ или $\frac{2R}{H} = \frac{1}{\pi}$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\pi} \text{ или } \varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}.$$

№ 12.2. Через две образующие конуса, угол между которыми равен 2α, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Определить наклон образующей к плоскости основания.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle ASB$ между образующими AS и SB (рис. 12.6) равен 2α. Проведем высоту конуса SO и $SD \perp AB$. Тогда на основании теоремы о трех перпендикулярах $OD \perp AB$. Следовательно, $\angle SDO$ будет линейным углом двугранного угла между плоскостью $\triangle ASB$ и основанием конуса. Согласно условию $\angle SDO = \beta$. Требуется определить $\angle SAO = \varphi$.

$\triangle ASB$ — равнобедренный. Поэтому высота SD является биссектрисой $\angle ASB$, т. е. $\angle ASD = \angle DSB = \alpha$. Из прямоугольного $\triangle ASD \frac{SD}{AS} = \cos\alpha$. Из прямоугольного $\triangle SOD$ $\frac{SO}{SD} = \sin\beta$. Умножим полученные два равенства

$$\frac{SD \cdot SO}{AS \cdot SD} = \cos\alpha \sin\beta \text{ или } \frac{SO}{AS} = \cos\alpha \sin\beta.$$

Но из прямоугольного $\triangle AOS \frac{SO}{AS} = \sin \angle SAO$. Следовательно, $\sin\varphi = \cos\alpha \sin\beta$ или

$$\varphi = \arcsin(\cos\alpha \sin\beta).$$

№ 12.3. Определить площадь осевого сечения цилиндра, если диагональ этого сечения равна d и образует с плоскостью основания угол α.

Р е ш е н и е. Воспользуемся рис. 12.5. Пусть $BC = d$, $\angle BCD = \alpha$. Требуется определить площадь прямоугольника $ABDC$.

$$S_{ABDC} = CD \cdot BD.$$

Из прямоугольного $\triangle BCD$

$$\frac{BD}{BC} = \sin\alpha, \quad \frac{CD}{BC} = \cos\alpha.$$

Откуда

$$BD = BC \sin\alpha = d\sin\alpha,$$
$$CD = BC\cos\alpha = d\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$S_{ABDC} = d^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{d^2}{2}\sin 2\alpha.$$

№ 12.4. В цилиндре высота равна диаметру d окружности основания. Некоторая точка окружности верхнего основания соединена с точкой нижней окружности так, что соединяющая прямая образует с плоскостью основания угол α. Определить кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть на рис. 12.7 $OO_1 = d$. $\angle ABC = \alpha$. Требуется определить кратчайшее расстояние между прямыми AB и OO_1.

Прямые AB и OO_1 — скрещивающиеся. Через прямую AB проведем плоскость параллельно оси OO_1. Тогда, очевидно, расстояние между OO_1 и AB будет равно расстоянию от любой точки прямой OO_1 до плоскости. В самом деле, если через OO_1 провести плоскость

$OPKO_1$ перпендикулярно плоскости $ACBD$, то PK будет параллельна OO_1 (докажите) и четырехугольник $OPKO_1$ будет представлять собой прямоугольник. Поэтому $OP = O_1K = MN$, которое и есть искомым расстоянием.

Из прямоугольного $\triangle ABC$

$$\frac{AC}{BC} = \operatorname{tg} \angle ABC.$$

Но $AC = OO_1 = d$, $\angle ABC = \alpha$. Поэтому

$$BC = \frac{AC}{\operatorname{tg} \angle ABC} = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

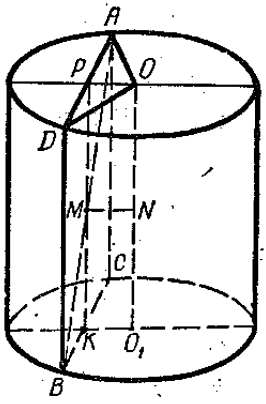


Рис. 12.7.

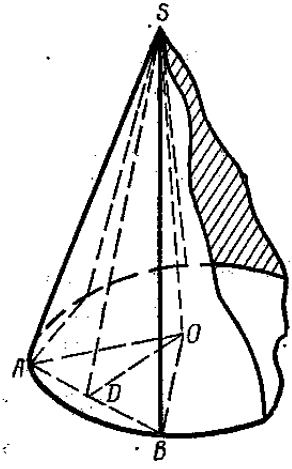


Рис. 12.8.

$\triangle AOD$ — равнобедренный, так как $OA = OD = \frac{d}{2}$. Следовательно,

$$AP = DP = \frac{BC}{2} = \frac{d}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Из прямоугольного $\triangle DPO$ по теореме Пифагора

$$OP = \sqrt{OD^2 - DP^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{d}{2 \sin \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Итак,

$$MN = \frac{d}{2 \sin \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Чтобы эта формула имела смысл, необходимо, чтобы угол α был не меньше 45°, в противном случае $\cos 2\alpha$ будет величина положительная и подкоренное выражение будет отрицательным.

В $\triangle ABC$ $AC = d$, BC будет меньше d как хорда окружности диаметра d. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{BC}$ будет больше единицы, т. е. $\alpha > 45°$.

№ 12.5. В конус, образующая которого равна диаметру окружности основания, вписана правильная n-угольная пирамида. Определить двугранный угол при ребрах основания.

Р е ш е н и е. На рис. 12.8 изображена часть конуса, в который вписана правильная n-угольная пирамида. Требуется определить двугранный угол AB.

Проведем $SD \perp AB$. Тогда на основании теоремы о трех перпендикулярах $OD \perp AB$ и $\angle SDO = \varphi$ будет представлять собой линейный угол двугранного угла AB.

Центральный $\angle AOB$ равен $\angle AOB = \frac{360°}{n}$; так как $\triangle AOB$ равнобедренный ($AO = OB$, как радиусы основания), то $\angle DOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180°}{n}$.

Если обозначить $OB = r$, то из прямоугольного $\triangle OBD$ $\frac{OD}{OB} = \cos\angle BOD$ или $OD = r\cos\frac{180°}{n}$.

Из прямоугольного $\triangle AOS$

$$OS = \sqrt{AS^2 - AO^2}.$$

Но $AO = r$, $AS = 2r$ (по условию). Поэтому

$$OS = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного $\triangle SOD$

$$\frac{SO}{OD} = \operatorname{tg}\angle SDO.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\sqrt{3}}{r\cos\frac{180°}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{180°}{n}}.$$

Итак,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{180°}{n}}.$$

№ 12.6. Найти площадь основания конуса, образующая которого равна l, а площадь осевого сечения S.

Р е ш е н и е. Пусть $AS = l$ (рис. 12.9), а площадь $\triangle SAB$ равна S. Требуется определить площадь основания.

$S_{\text{осн}} = \pi r^2$, где r — радиус круга основания. Стороны $\triangle SAB$ соответственно равны l, l и $2r$. Периметр $2p = 2l + 2r$, $p = l + r$. Тогда по формуле Герона $S = \sqrt{r^2(l^2 - r^2)}$, откуда находим

$$r^2 = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 - 4S^2}}{2}$$

и

$$S_{\text{осн}} = \frac{\pi}{2}(l^2 \pm \sqrt{l^4 - 4S^2}).$$

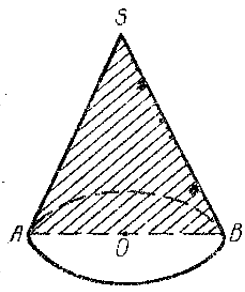


Рис. 12.9.

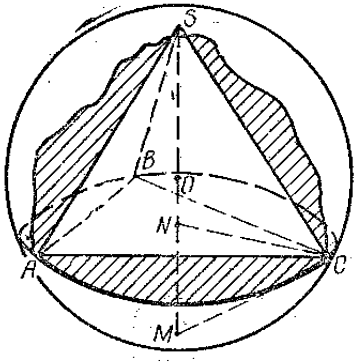


Рис. 12.10.

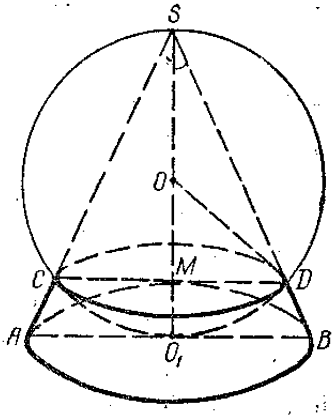


Рис. 12.11.

№ 12.7. Найти радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 13, 14 и 15, а боковые ребра, наклонены к плоскости основания под углом 15°.

Р е ш е н и е. Пусть треугольная пирамида $SABC$ (рис. 12.10) вписана в сферу O. $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$, $\angle SCN = 15°$. Требуется определить радиус сферы OS.

По формуле Герона находим площадь $\triangle ABC$. $S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$. CN — радиус круга, описанного вокруг основания ABC пирамиды $SABC$ (докажите). Радиус круга, описанного вокруг треугольника, находится по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где

a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь. Поэтому

$$CN = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}.$$

$\triangle SCM$ — прямоугольный, так как $\triangle SCM = 90°$ (докажите). CN — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу SM. Из прямоугольного $\triangle SCN$ находим

$$SN = CN \operatorname{tg} 15° = \frac{68}{5} \operatorname{tg} 15°.$$

Из прямоугольного $\triangle NCM$

$$NM = CN \operatorname{tg} 75° = \frac{68}{5} \operatorname{tg} 75°.$$

Но $SM = SN + NM$ — диаметр сферы. Поэтому

$$SO = \frac{SN + NM}{2} = \frac{\frac{65}{8} \operatorname{tg} 15° + \frac{65}{8} \operatorname{tg} 75°}{2} = \frac{65}{16} (\operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 75°).$$

Преобразовав сумму тангенсов, стоящую в скобках, получим

$$SO = \frac{65}{16} \cdot \frac{2}{\sin 30°} = \frac{65}{4}.$$

Итак, радиус сферы равен $R = \frac{65}{4}$.

№ 12.8. Середина высоты прямого конуса с образующей l и углом при вершине α принята за центр шара, проходящего через вершину. Определить радиус круга, получившегося в результате пересечения конуса и шара.

Р е ш е н и е. Пусть на высоте SO_1 конуса SAB (рис. 12.11) как диаметре построена сфера O. $\angle ASB = \alpha$, $SB = l$, требуется определить MD.

Из прямоугольного $\triangle SO_1B$ $SO_1 = SB \cos \angle O_1SB = l \cos \frac{\alpha}{2}$. В прямоугольном $\triangle MOD$ $\angle MDO = 90° - \alpha$ (докажите). Поэтому $MD = OD \cos (90° - \alpha) = OD \sin \alpha$, но $OD = \frac{SO_1}{2} = \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ и $MD = \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha$.

Итак,

$$MD = \frac{l}{2} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}.$$

ЗАНЯТИЕ ТРИНАДЦАТОЕ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Теоретический материал

1. Поверхности * многогранников. Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро. При этом под перпендикулярным сечением понимается многоугольник, получаемый от пересечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам.

В частности, боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы обоих оснований на апофему.

Очевидно, чтобы получить полную поверхность многогранника, нужно к его боковой поверхности прибавить площади оснований.

2. Поверхности цилиндра и конуса. Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту. Если обозначить радиус окружности основания цилиндра через r, его высоту через h, то площадь боковой поверхности выражается формулой

$$S_б = 2\pi rh \qquad (13.1)$$

Чтобы получить полную поверхность цилиндра, нужно к боковой поверхности $S_б$, прибавить площади оснований, которые равны πr^2 каждая. Поэтому полная поверхность конуса равна

$$S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r). \qquad (13.2)$$

Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей.

Если обозначить через r радиус окружности основания конуса, через l — длину образующей, то его боковая поверхность выразится формулой

$$S_б = 2\pi r \frac{l}{2} = \pi rl. \qquad (13.3)$$

---

* В дальнейшем под словом поверхность будем понимать площадь поверхности.

Полная поверхность конуса, очевидно, равна

$$S_{\text{п}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r (l + r). \tag{13.4}$$

Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую, т. е.

$$S_{\text{б}} = \pi l (R + r), \tag{13.5}$$

где l — длина образующей, R — радиус окружности нижнего основания, r — радиус окружности верхнего основания.

Полная поверхность усеченного конуса равна

$$S_{\text{п}} = \pi (R^2 + r^2 + Rl + rl). \tag{13.6}$$

Кроме вышеприведенных формул имеет место еще следующая теорема о боковой поверхности цилиндра, конуса и усеченного конуса: боковая поверхность каждого из этих трех тел равна произведению высоты на длину окружности, радиус которой равен длине перпендикуляра, восстановленного к образующей из ее середины до пересечения с осью.

3. Поверхность шара и его частей. Под поверхностью шарового пояса, образованного вращением части полуокружности вокруг диаметра, понимают предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением около этого диаметра вписанной в дугу правильной ломаной линии, если число сторон этой ломаной неограниченно увеличивать путем последовательного удвоения.

Это же определение справедливо для поверхности шарового сегмента и для самого шара.

Площадь поверхности шарового пояса и шарового сегмента равна произведению длины окружности большого круга на высоту. Если обозначить через R — радиус шара, h — высоту сегмента и шарового пояса, то поверхность их будет вычисляться по формуле

$$S = 2\pi Rh. \tag{13.7}$$

Поскольку сам шар можно рассматривать как шаровой пояс с высотой $2R$, то поверхность шара равна

$$S = 4\pi R^2. \tag{13.8}$$

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 13.1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда a и b. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Пусть AC_1 — прямоугольный параллелепипед. $AB = a$, $AD = b$, $\angle B_1DB = \alpha$. Определить боковую поверхность параллелепипеда (рис. 13.1).

Поскольку параллелепипед прямоугольный, то ребро его перпендикулярно к основанию, а основание есть прямоугольник со

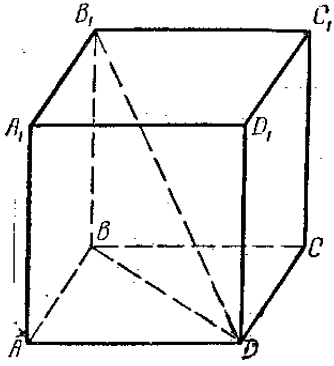


Рис. 13.1.

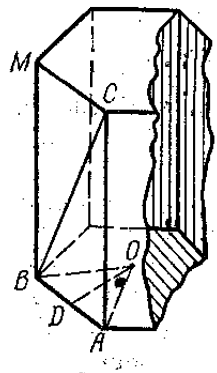


Рис. 13.2.

сторонами a и b. Поэтому боковая поверхность будет равна произведению периметра основания на боковое ребро, т. е.

$$S_{бок} = 2(AB + AD)\,BB_1.$$

Из прямоугольного $\triangle B_1BD$

$$B_1B = BD \operatorname{tg} \angle B_1DB = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$S_{бок} = 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

№ 13.2. Вычислить полную поверхность прямой призмы, основание которой есть правильный n-угольник, если известна апофема b основания и радиус R круга, описанного около боковой грани (рис. 13.2).

Р е ш е н и е. Полная поверхность призмы состоит из боковой поверхности и площади оснований.

В основании лежит правильный n-угольник. Площадь его равна произведению периметра на половину апофемы. В $\triangle BOD$ $OD = b$ — апофема, $\angle BOD = \frac{180^\circ}{n}$, $BD = \frac{AB}{2}$. Поэтому

$$BD = OD \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = b \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \text{ и } AB = 2b \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

Периметр p n-угольника основания равен $p = 2bn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, а площадь основания равна

$$S_{\text{осн}} = \frac{b}{2} 2bn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = b^2 n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Для нахождения боковой поверхности призмы необходимо знать боковое ребро. Если около боковой грани $ABMC$ описать круг, то, очевидно, BC будет его диаметром. Поэтому из прямоугольного $\triangle ABC$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - 4b^2 n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}} =$$

$$= 2\sqrt{R^2 - b^2 n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$S_{\text{бок}} = 2bn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \cdot 2\sqrt{R^2 - b^2 n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}} =$$

$$= 4bn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \sqrt{R^2 - b^2 n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

Полная поверхность равна

$$S = 4bn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \sqrt{R^2 - b^2 n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}} + 2b^2 n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$$

$$= 2bn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \left(2\sqrt{R^2 - b^2 n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{n}} + b\right).$$

№ 13.3. Вычислить полную поверхность правильной n-угольной пирамиды, если известна ее высота h и радиус R круга, описанного около основания (рис. 13.3).

Р е ш е н и е. Полная поверхность конуса состоит из боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения площади основания нам необходима будет сторона и апофема основания, а для нахождения боковой поверхности — апофема пирамиды. Найдем их.

Из прямоугольного $\triangle AOD$

$$OD = AO \cos \angle AOD = R \cos \frac{180^\circ}{n},$$

$$AD = AO \sin \angle AOD = R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad AB = 2AD.$$

Из прямоугольного $\triangle DOS$

$$SD = \sqrt{OD^2 + OS^2} = \sqrt{h^2 + R^2 \cos^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

Площадь основания равна полупроизведению периметра основания на апофему основания.

$$S_{\text{осн}} = 2Rn \sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{R\cos\frac{180^\circ}{n}}{2} = \frac{R^2 n}{2} 2\sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos\frac{180^\circ}{n} =$$

$$= \frac{R^2 n}{2} \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

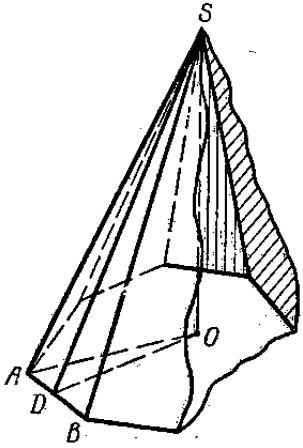


Рис. 13.3.

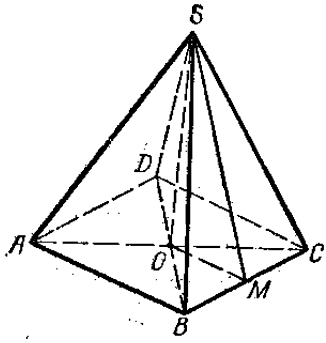


Рис. 13.4.

Боковая поверхность равна полупроизведению периметра основания на апофему пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = Rn \sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \sqrt{h^2 + R^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

Полная поверхность равна

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{R^2 n}{2}\sin\frac{360^\circ}{n} +$$

$$+ Rn\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2 + R^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

№ 13.4. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна m, боковая грань образует с плоскостью основания угол β. Определить боковую поверхность пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ (рис. 13.4) правильная четырехугольная пирамида. $AC = m$, $\angle SMO = \beta$. Требуется определить боковую поверхность пирамиды.

Боковая поверхность пирамиды равна полупроизведению периметра основания на апофему пирамиды. Поскольку пирамида правильная, то в основании ее лежит квадрат. Периметр его равен учетверенной стороне. Поэтому

$$S_{\text{бок}} = 4BC \cdot SM.$$

Но $BC = \frac{m\sqrt{2}}{2}$, как сторона квадрата, диагональ которого равна m. Из прямоугольного $\triangle SOM$

$$\frac{OM}{SM} = \cos\beta, \text{ т. е. } SM = \frac{OM}{\cos\beta}, \quad OM = \frac{BC}{2} = \frac{m\sqrt{2}}{4}.$$

Поэтому

$$SM = \frac{m\sqrt{2}}{4\cos\beta} \text{ и } S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{m\sqrt{2}}{4\cos\beta} = \frac{m^2}{2\cos\beta}.$$

№ 13.5. Периметр боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен $2p$, плоский угол при вершине — 2α. Определить боковую поверхность пирамиды.

Р е ш е н и е. Воспользуемся рис. 13.4. Пусть $SB + SC + BC = 2p$, $\angle BSC = 2\alpha$. Боковая грань правильной пирамиды есть равнобедренный треугольник. Поэтому $\triangle SBM = \triangle SCM$ и $SB + BM = p$, а $\angle BSM = \alpha$. Обозначим $BM = x$. Тогда $SB = p - x$ и из прямоугольного $\triangle SBM$ $\frac{MB}{SB} = \sin\alpha$, или $\frac{x}{p-x} = \sin\alpha$, откуда $x = \frac{p\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

$$BC = 2x = \frac{2p\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$

$$SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{(p-x)^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px} =$$

$$= \sqrt{p^2 - \frac{2p^2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sqrt{p^2\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}.$$

Преобразовывая подкоренное выражение, получим

$$SM = p\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогда

$$S_{бок} = \frac{4BC \cdot SM}{2} = \frac{8p \sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)} \cdot p \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{8p^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cdot 2 \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2p^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

№ 13.6. Вычислить полную поверхность цилиндра, если его боковая поверхность S, а высота в p раз больше радиуса основания.

Р е ш е н и е. Обозначим радиус основания цилиндра через r, а высоту его через h. Тогда $\frac{h}{r} = p$, или $h = pr$. Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту, т. е. $S = 2\pi rh$, или $S = 2\pi rpr = 2\pi pr^2$, откуда $r^2 = \frac{S}{2\pi p}$. Полная поверхность цилиндра состоит из площади оснований и боковой поверхности. Основание цилиндра есть круг, площадь его равна πr^2, т. е.

$$S_{осн} = \frac{S}{2p}.$$

Полная поверхность равна

$$S_{пол} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2 \cdot \frac{S}{2p} + S = \frac{S}{p} + S = \frac{S(1+p)}{p}.$$

№ 13.7. Определить боковую поверхность конуса, если высота его h, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

Р е ш е н и е. Пусть $SO = h$, $\angle SAO = \alpha$ (рис. 13.5). Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину апофемы. Из прямоугольного $\triangle SOA$

$$\frac{SO}{SA} = \sin\angle SAO,\ SA = \frac{SO}{\sin\angle SAO} = \frac{h}{\sin\alpha},$$

$$\frac{SO}{OA} = \operatorname{tg}\angle SAO,\ OA = \frac{SO}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$S_{бок} = 2\pi \cdot OA \cdot \frac{SA}{2} = \pi \cdot \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{\pi h^2}{\operatorname{tg}\alpha \sin\alpha} = \frac{\pi h^2 \cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

№ 13.8. Боковая поверхность конуса S. Определить площадь осевого сечения, если угол при его вершине равен 2α.

Р е ш е н и е. Пусть боковая поверхность конуса (рис. 13.5) равна S, $\angle BSA = 2\alpha$. Требуется определить площадь $\triangle BSA$.

Обозначим радиус окружности OA основания конуса через r, образующую SA через l, а высоту SO через h. Тогда $\pi rl = S$. Из прямоугольного $\triangle SOA$ $\frac{r}{l} = \sin\alpha$ ($\angle OSA = \alpha$, так как $\triangle BSA$ — равнобедренный), $l = \frac{r}{\sin\alpha}$. Подставляя значение l в выражение для

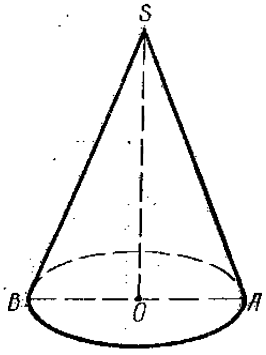


Рис. 13.5.

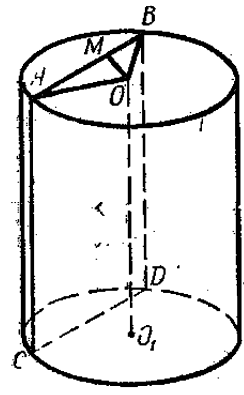


Рис. 13.6.

боковой поверхности, получим $\pi r \cdot \frac{r}{\sin\alpha} = S$, откуда $r = \sqrt{\frac{S\sin\alpha}{\pi}}$.

$$\frac{h}{r} = \operatorname{ctg}\alpha,\ h = r\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{S\sin\alpha}{\pi}} \cdot \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$S_{\triangle BSA} = \frac{1}{2}BA \cdot h = rh = r^2\operatorname{ctg}\alpha = \frac{S\sin\alpha}{\pi}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{S\cos\alpha}{\pi}.$$

№ 13.8. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α и отстоящая от оси на d. Площадь сечения S. Определить боковую поверхность цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть плоскость $ABDC \parallel OO_1$ (рис. 13.6), $OM = d$, $\smile AB = \alpha$, $S_{ABDC} = S$. Требуется определить боковую поверхность цилиндра. Центральный $\angle AOB = \alpha$, так как он опирается на дугу $AB = \alpha$. $\angle AOM = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного $\triangle AOM$ $\frac{AM}{MO} = \operatorname{tg}\angle AOM$, $AM = MO\operatorname{tg}\angle AOM = d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AB = 2AM = 2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $S_{ABDC} = AB \cdot AC$, или $S = 2dH\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, откуда $H = \frac{S}{2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Из $\triangle AOM$

$$\frac{OM}{OA} = \cos\frac{\alpha}{2},\quad OA = \frac{OM}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Боковая поверхность цилиндра равна

$$S_{бок} = 2\pi \cdot OA \cdot H = 2\pi \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{2d\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi S}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

№ 13.9. Нижнее и верхнее основания осевого сечения усеченного конуса равны соответственно a и b, острый угол равен α. Определить боковую поверхность этого конуса.

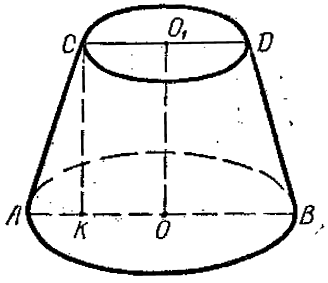


Рис. 13.7.

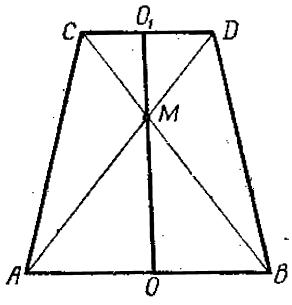


Рис. 13.8.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = a$ (рис. 13.7), $CD = b$, $\angle CAB = \alpha$. Определить боковую поверхность.

Боковая поверхность усеченного конуса определяется по формуле (13.5). Радиусы нижнего и верхнего оснований соответственно равны $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Образующая l легко находится из прямоугольного $\triangle ACK$

$$AK = \frac{AB - CD}{2} = \frac{a-b}{2},\quad AC = \frac{AK}{\cos\angle CAK} = \frac{a-b}{2\cos\alpha}.$$

Поэтому $$S_{бок} = \pi\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(a-b)}{2\sin\alpha} = \frac{\pi(a^2-b^2)}{4\sin\alpha}.$$

№ 13.10. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая равна l и образует с плоскостью основания угол α. Определить боковую и полную поверхность этого усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Вынесем плоскость осевого сечения усеченного конуса рис. 13.7 на рис. 13.8.

Пусть $BC \perp AD$, $\angle CAB = \alpha$, $AC = l$. Требуется определить боковую и полную поверхность усеченного конуса.

Для определения искомой поверхности нам необходимо знать радиусы AO и CO_1 оснований. $\triangle AMB$ — равнобедренный и прямоугольный. Поэтому $\angle MAO = 45°$. Следовательно, $\angle CAM = \alpha - 45°$. Из прямоугольного $\triangle CAM$

$$\frac{AM}{AC} = \cos \angle CAM,\ AM = AC \cos \angle CAM = l \cos(\alpha - 45°),$$

$$\frac{CM}{AC} = \sin \angle CAM,\ CM = l \sin \angle CAM = l \sin(\alpha - 45°).$$

Из прямоугольных $\triangle AMO$ и $\triangle CMO_1$ легко находим

$$AO = AM \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha - 45°),$$

$$CO_1 = CM \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \sin(\alpha - 45°),$$

$$S_{\text{бок}} = \pi (CO_1 + AO) AC = \frac{\pi l^2 \sqrt{2}}{2} [\cos(\alpha - 45°) + \sin(\alpha - 45°)] =$$

$$= \pi l^2 \sin \alpha.$$

Для нахождения полной поверхности найдем площади оснований.

Площадь S_1 верхнего основания равна

$$S_1 = \frac{\pi l^2}{2} \sin^2(\alpha - 45°).$$

Площадь S_2 нижнего основания равна

$$S_2 = \frac{\pi l^2}{2} \cos^2(\alpha - 45°).$$

Полная поверхность равна

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2 = \pi l^2 \sin \alpha + \frac{\pi l^2}{2} \cos^2(\alpha - 45°) +$$

$$+ \frac{\pi l^2}{2} \sin^2(\alpha - 45°) = \frac{\pi l^2}{2} [2 \sin \alpha + \cos^2(\alpha - 45°) +$$

$$+ \sin^2(\alpha - 45°)] = \frac{\pi l^2}{2} (2 \sin \alpha + 1).$$

№ 13.11. Равносторонний $\triangle ABC$ (рис. 13.9) вращается около прямой MN, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через

его вершину C и не пересекающей самого треугольника. Определить поверхность тела, полученного вращением данного треугольника, если сторона треугольника равна a и острый угол, который образует сторона AC с прямой MN, равен α.

Р е ш е н и е. Пусть требуется определить поверхность тела, изображенного на рис. 13.9. При этом $AB = BC = AC = a$, $\angle ACO = \alpha$.

Искомая поверхность будет, очевидно, состоять из боковых поверхностей конусов BCB_1, ACA_1 и усеченного конуса BB_1A_1A.

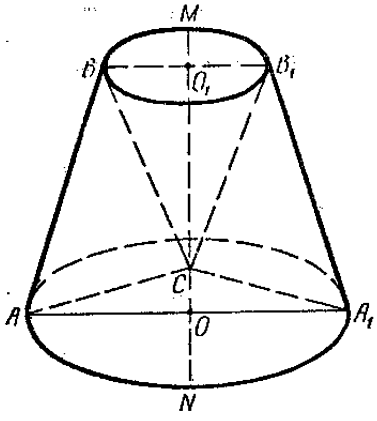


Рис. 13. 9.

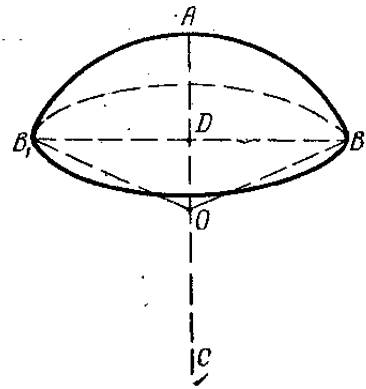


Рис. 13. 10.

Для нахождения этих поверхностей нам необходимо знать радиусы BO_1 и AO оснований.

Из прямоугольного $\triangle ACO$

$$\frac{AO}{AC} = \sin \angle ACO,$$

$$AO = AC \sin \angle ACO = a \sin \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle BCO_1$

$$\frac{BO_1}{BC} = \sin \angle BCO_1.$$

Но

$$\angle BCO_1 = 180° - (\angle BCA + \angle ACO) = 120° - \alpha.$$

Следовательно,

$$BO_1 = a \sin (120° - \alpha).$$

Боковая поверхность S_1, конуса BCB_1, равна

$$S_1 = \pi \cdot BO_1 \cdot BC = \pi a \sin(120° - \alpha) \cdot a = \pi a^2 \sin(120° - \alpha).$$

Боковая поверхность S_2 конуса ACA_1 равна

$$S_2 = \pi \cdot AO \cdot AC = \pi a \sin\alpha \cdot a = \pi a^2 \sin\alpha.$$

Боковая поверхность S_3 усеченного конуса BB_1A_1A равна

$$S_3 = \pi (BO_1 + AO) AB = \pi a^2 [\sin\alpha + \sin(120° - \alpha)].$$

Поверхность S всего тела равна

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi a^2 \sin(120° - \alpha) + \pi a^2 \sin\alpha +$$
$$+ \pi a^2 [\sin\alpha + \sin(120° - \alpha)] = 2\pi a^2 [\sin\alpha + \sin(120° - \alpha)] =$$
$$= 2\sqrt{3}\,\pi a^2 \cos(\alpha - 60°).$$

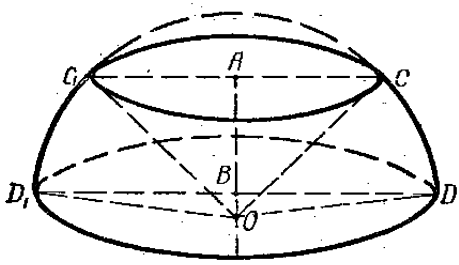


Рис. 13.11.

Итак,

$$S = 2\sqrt{3}\,\pi a^2 \cos(\alpha - 60°).$$

№ 13.12. Дуга окружности радиуса r, содержащая $2\alpha°$, вращается вокруг диаметра, проходящего через конец этой дуги. Определить поверхность тела вращения.

Р е ш е н и е. Пусть дуга AB вращается вокруг диаметра AC. $\smile AB = 2\alpha°$, $AO = r$. Требуется определить поверхность шарового сегмента B_1AB (рис. 13.10).

Площадь шарового сегмента равна произведению длины окружности большого круга на высоту, т. е.

$$S = 2\pi r \cdot AD.$$

$AD = AO - OD$. Из прямоугольного $\triangle BOD$ $\frac{OD}{OB} = \cos \angle DOB$, $\angle DOB = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на дугу 2α.

Поэтому

$$OD = r\cos 2\alpha,$$
$$AD = r - r\cos 2\alpha = r(1 - \cos 2\alpha) = 2r\sin^2\alpha,$$
$$S = 2\pi r \cdot 2r\sin^2\alpha = 4\pi r^2 \sin^2\alpha.$$

№ 13.13. Верхний диаметр шарового пояса, расположенного по одну сторону от центра шара, стягивает дугу α большого кру-

га, проходящего через ось пояса, а нижний диаметр стягивает дугу 3α. Высота пояса равна h. Определить поверхность пояса (рис. 13.11).

Р е ш е н и е. Для определения поверхности шарового пояса необходимо знать радиус r большого круга. Найдем его. Из прямоугольного $\triangle AOC$ $\frac{AO}{r} = \cos\frac{\alpha}{2}$ $\left(\angle AOC = \frac{1}{2}\angle C_1OC\right.$, так как $\triangle C_1OC$ равнобедренный, а $\angle C_1OC = \alpha$ как центральный, опирающийся на дугу $C_1C = \alpha$).

$$AO = r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично $BO = r\cos\frac{3\alpha}{2}$ из прямоугольного $\triangle BOD$. Находя r из полученных равенств и приравнивая их, получим

$$\frac{AO}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{BO}{\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

Но $AO = AB + OB = h + OB$.
Поэтому

$$\frac{h + OB}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{OB}{\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

Решая это уравнение относительно OB, получим

$$OB = \frac{h\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}} = \frac{h\cos\frac{3\alpha}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь из $\triangle BOD$ находим r

$$r = \frac{h}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и

$$S = 2\pi rh = \frac{2\pi h}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot h = \frac{\pi h^2}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

ЗАНЯТИЕ ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

Теоретический материал

1. Основные определения. Величина части пространства, занимаемая геометрическим телом, называется объемом этого тела. Объему всякого геометрического тела соответствует некоторое число, измеряющее этот объем. Это число должно удовлетворять следующим условиям: объем тела есть число неотрицательное; объем тела, составленного из нескольких тел без общих внутренних точек, равен сумме объемов этих тел; объемы равных тел равны между собой.

При вычислении объемов за единицу измерения принимают объем куба, ребро которого равно единице.

Тела, имеющие равные объемы, называются равновеликими.

2. Объемы многогранников. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту, т. е.

$$V = S \cdot H, \tag{14.1}$$

где S — площадь основания, H — высота призмы.

Иногда при вычислении объема призмы пользуются следующей теоремой: наклонная призма равновелика такой прямой призме, у которой основание равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота равна ее боковому ребру.

$$V = S_{\text{п.с}} \cdot l, \tag{14.2}$$

где $S_{\text{п.с}}$ — площадь перпендикулярного сечения,

l — длина бокового ребра призмы.

Объем параллелепипеда, как и всякой призмы, равен произведению площади основания на высоту.

В частности, объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, а объем куба равен кубу его ребра, т. е.

$$V = a \cdot b \cdot c, \tag{14.3}$$

где a, b, c — длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда.

Если $a = b = c$, то $V = a^3$.

Объем пирамиды равен произведению площади основания на одну треть высоты, т. е.

$$V = \frac{1}{3} SH, \tag{14.4}$$

где S — площадь основания, H — высота пирамиды.

Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид, имеющих высоту, равную высоте этой усеченной пирамиды, а основания соответственно равны: одной — нижнему основанию данной пирамиды, другой — верхнему основанию, а площадь основания третьей пирамиды равна среднему геометрическому * площадей верхнего и нижнего оснований, т. е.

$$V = \frac{1}{3} H (S + s + \sqrt{S \cdot s}), \qquad (14.5)$$

где H — высота усеченной пирамиды,
S — площадь нижнего основания,
s — площадь верхнего основания.

3. Объем цилиндра и конуса. Под объемом цилиндра понимают общий предел объемов вписанных ** в цилиндр и описанных около него правильных одноименных призм, когда число сторон каждого основания неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения.

Аналогично, под объемом конуса понимают общий предел объемов вписанных в конус и описанных вокруг него правильных одноименных пирамид, когда число сторон каждого основания неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Если обозначить через R — радиус круга основания, а через H — высоту цилиндра, то его объем равен

$$V = \pi R^2 H. \qquad (14.6)$$

Объем конуса равен произведению площади основания на одну треть высоты, т. е.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \qquad (14.7)$$

Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих высоту, равную высоте этого усеченного конуса, с основаниями равными: один — нижнему основанию данного усеченного конуса, другой — верхнему основанию, а площадь основания третьего равна среднему геометрическому площадей верхнего и

---

* Напомним, что средним геометрическим двух величин a и b называется корень квадратный из их произведения, т. е. $\sqrt{ab}$.

** Призма называется вписанной в цилиндр, если ее основания являются многоугольниками, вписанными в основания цилиндра. Аналогично определяется описанная около цилиндра призма.

нижнего оснований, т. е.

$$V = \frac{1}{3} H (S + s + \sqrt{S \cdot s}), \qquad (14.8)$$

или

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + R \cdot r), \qquad (14.9)$$

где H — высота усеченного конуса,
R и S — радиус и площадь нижнего основания,
r и s — радиус и площадь верхнего основания.

4. Объем шара и его частей. Тело, образованное вращением кругового сектора COD (рис. 14.1) вокруг диаметра AB, не пересекающего его площади, называется шаровым сектором. Это тело ограничено боковыми поверхностями двух конусов и поверхностью шарового пояса. Поверхность шарового пояса называется основанием шарового сектора.

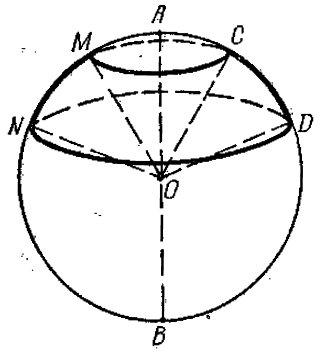


Рис. 14.1.

Под объемом шарового сектора, полученного вращением вокруг диаметра AB кругового сектора COD, понимают предел, к которому стремится объем тела, получаемого вращением многоугольного сектора, ограниченного правильной ломанной линией, вписанной в дугу кругового сектора, и двумя радиусами, проведенными в концы ломаной, когда число сторон его неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения.

Объем шарового сектора равен произведению площади поверхности его основания на одну треть радиуса.

Эта теорема справедлива и в том случае, когда один из радиусов шарового сектора совпадает с осью вращения.

Из этой теоремы следует, что объем шара равен произведению площади его поверхности на одну треть радиуса, т. е.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \qquad (14.10)$$

где R — радиус шара.

Существует теорема, дающая зависимость между поверхностью и объемом шара и описанного вокруг него цилиндра: поверхность и объем шара соответственно составляет 2/3 полной поверхности и объема цилиндра, описанного вокруг шара.

Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента, т. е.

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right), \qquad (14.11)$$

где H — высота сегмента,
R — радиус шара.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

№ 14.1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол α, а с другой — угол β. Определить объем параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Пусть задан прямоугольный параллелепипед (рис. 14.2). $B_1D = l$. Угол между диагональю B_1D и гранью BB_1C_1C равен α. Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Докажем, что проекцией диагонали B_1D на грань BB_1C_1C есть B_1C. В самом деле, $CD \perp C_1C$, так как параллелепипед прямой и $CD \perp BC$, так как параллелепипед прямоугольный. На основании признака перпендикулярности прямой и плоскости CD будет перпендикулярна плоскости грани BB_1C_1C. А это означает, что B_1C — проекция B_1D на грань BB_1C_1C и $\angle DB_1C = \alpha$.

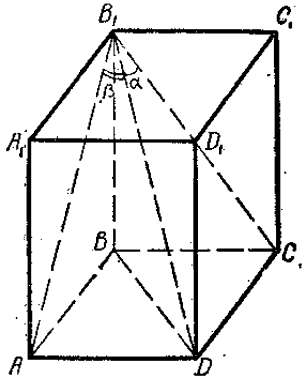


Рис. 14.2.

Аналогично доказываем, что $\angle DB_1A = \beta$.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е.

$$V = AB \cdot BC \cdot BB_1.$$

Из прямоугольного $\triangle B_1CD$

$$\frac{CD}{B_1D} = \sin \angle DB_1C, \quad CD = l \sin \alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle AB_1D$

$$\frac{AD}{B_1D} = \sin \angle AB_1D, \quad \frac{AB_1}{DB_1} = \cos \angle AB_1D,$$

$$AD = l \sin \beta, \quad AB_1 = l \cos \beta.$$

Высоту параллелепипеда BB_1 найдем из прямоугольного $\triangle AB_1B$

$$BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{l^2\cos^2\beta - l^2\sin^2\alpha} = l\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

Тогда

$$V = l\sin\alpha \cdot l\sin\beta \cdot l\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} = l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

Подкоренное выражение преобразуем следующим образом:

$$\cos^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2(90^\circ - \beta) - \sin^2\alpha =$$

$$= [\sin(90^\circ - \beta) - \sin\alpha][\sin(90^\circ - \beta) + \sin\alpha] =$$

$$= 2\sin\frac{90^\circ - \beta + \alpha}{2}\cos\frac{90^\circ - \beta - \alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{90^\circ - \beta + \alpha}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{90^\circ - \beta - \alpha}{2} = \sin[90^\circ - (\beta - \alpha)]\sin[90^\circ - (\beta + \alpha)] =$$

$$= \cos(\beta - \alpha)\cos(\beta + \alpha).$$

Тогда ответ получим в виде

$$V = l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\beta - \alpha)\cos(\beta + \alpha)}.$$

№ 14.2. Определить объем прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с острым углом α, если боковое ребро h призмы составляет с диагональю боковой грани угол β.

Р е ш е н и е. Пусть призма $ABCC_1B_1A_1$ — прямая. $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = \alpha$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$, $\angle A_1CC_1 = \beta$ (рис. 14.3). Требуется определить объем призмы.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Поскольку призма прямая, то высота ее равна боковому ребру h.

Из прямоугольного $\triangle AA_1C$

$$\frac{AC}{AA_1} = \operatorname{ctg}\angle ACA_1, \quad AC = h\operatorname{ctg}(90^\circ - \beta) = h\operatorname{tg}\beta.$$

Из прямоугольного $\triangle ABC$

$$AB = AC\sin\angle BCA = h\operatorname{tg}\beta\sin\alpha;$$

$$BC = AC\cos\angle BCA = h\operatorname{tg}\beta \cdot \cos\alpha;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{h^2\operatorname{tg}^2\beta\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{1}{4}h^2\operatorname{tg}^2\beta\sin 2\alpha;$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{4}h^3\operatorname{tg}^2\beta\sin 2\alpha.$$

№ 14.3. В треугольной призме два угла основания α и β, радиус описанного около основания круга R. Каждое боковое ребро l наклонено к плоскости основания под углом φ. Определить объем призмы.

Р е ш е н и е. Для определения объема призмы нам необходимо знать площадь основания и высоту призмы. Высота призмы B_1D легко находится из прямоугольного $\triangle B_1BD$ (рис. 14.4).

$$\frac{B_1D}{B_1B} = \sin \angle B_1BD, \quad B_1D = l \sin \varphi.$$

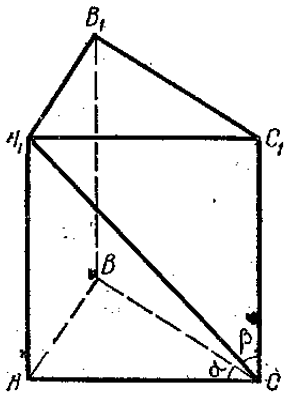


Рис. 14.3.

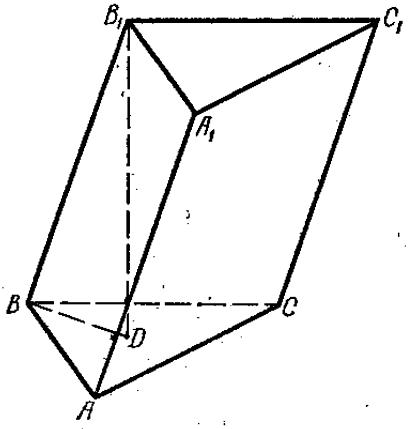


Рис. 14.4.

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle B = \alpha$, $\angle A = \beta$. Тогда $\angle C = 180° - (\alpha + \beta)$. Обозначим $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$, $\frac{a+b+c}{2} = p$. Тогда на основании теоремы синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin (\alpha + \beta)} = 2R,$$

откуда находим

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin (\alpha + \beta).$$

Для нахождения площади основания воспользуемся формулой Герона $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$:

$$p = R[\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)] = R\left[2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right] = 2R \sin \frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= 2R \sin \frac{\alpha+\beta}{2} 2\cos\alpha\cos\beta = 4R \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2};$$

$$p - a = R[\sin\beta - \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta)] =$$

$$= 4R\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$p - b = R[\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)] =$$

$$= 4R\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$p - c = R[\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+b)] =$$

$$= 4R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

и

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta,$$

а

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot B_1D = 2R^2 l \sin\varphi \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta.$$

№ 14.4. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним угол β. Определить объем пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть на рис. 14.5 $ABCD$ — ромб со стороной a $\angle BAD = \alpha$. Грани ASB и CSB перпендикулярны основанию, а грани CSD и ASD образуют с плоскостью основания угол β. Требуется определить объем пирамиды.

Проведем $BM \perp AD$. Поскольку SB перпендикулярно плоскости ромба $ABCD$, то на основании теоремы о трех перпендикулярах $SM \perp AD$. Следовательно, $\angle SMB = \beta$ будет линейным углом двугранного угла.

Объем пирамиды равен произведению площади основания на треть высоты. Площадь ромба $ABCD$ вычислим как произведение основания AD на высоту BM. Из прямоугольного $\triangle ABM$

$$\frac{BM}{AB} = \sin\angle BAM, \quad BM = a\sin\alpha.$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM = a^2 \sin\alpha.$$

Из прямоугольного $\triangle SBM$

$$\frac{SB}{BM} = \operatorname{tg}\angle SMB,$$

$$SB = BM \operatorname{tg} \angle SMB = a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta;$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SB = \frac{a^2 \sin \alpha}{3} a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{a^3}{3} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

№ 14.5. Определить объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α. Ребра наклонены к плоскости основания под углом β и равны b.

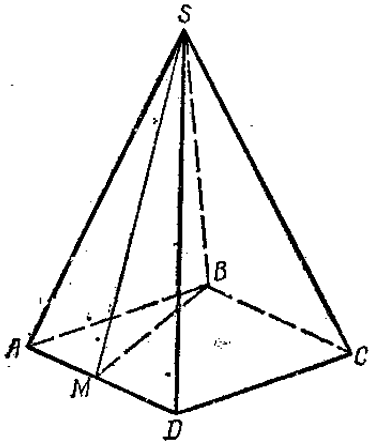


Рис. 14.5.

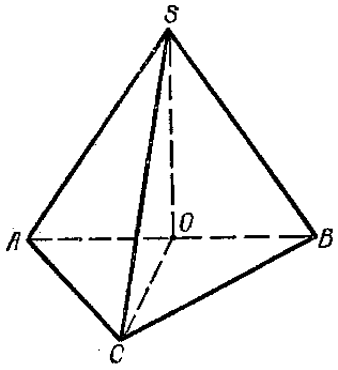


Рис. 14.6.

Р е ш е н и е. Пусть в пирамиде $SABC$ (рис. 14.6) $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = \alpha$, $SA = SB = SC = b$.

Поскольку боковые ребра равны и наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β, то, очевидно, будут равны и их проекции. Следовательно, вершина S пирамиды проектируется в центр описанной возле $\triangle ABC$ окружности. Кроме того, центр этой окружности должен лежать на гипотенузе AB. Следовательно, вершина S пирамиды проектируется в точку O, которая является серединой гипотенузы AB и $\angle SBO = \angle SCO = \angle SAO = \beta$.

Из прямоугольного $\triangle SOB$

$$\frac{OB}{SB} = \cos \angle SBO,$$

$$OB = b \cos \beta, \quad AB = 2OB = 2b \cos \beta.$$

Из прямоугольного $\triangle ABC$

$$AC = AB \sin \angle ABC = 2b \cos \beta \sin \alpha,$$

$$BC = AB\cos\angle ABC = 2b\cos\beta\cos\alpha,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2} = 2b^2\cos\beta\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha = b^2\cos^2\beta\sin 2\alpha.$$

Высоту SO пирамиды найдем из $\triangle SOB$

$$SO = SB\sin\angle SBO = b\sin\beta.$$

Тогда

$$V = S_{\triangle ABC}\cdot SO = b^2\cos^2\beta\sin 2\alpha\, b\sin\beta = b^3\cos^2\beta\sin\beta\sin 2\alpha.$$

№ 14.6. Высота правильной шестигранной пирамиды равна h. Плоский угол при вершине равен 2α. Определить объем пирамиды.

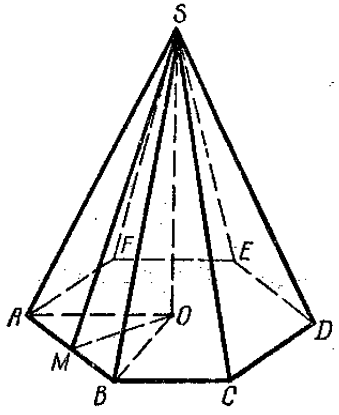


Рис. 14.7.

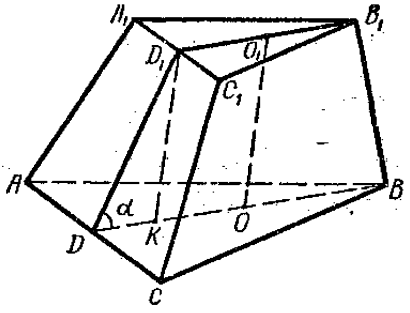


Рис. 14.8.

Р е ш е н и е. Пусть $SABCDEF$ (рис. 14.7) — правильная шестигранная пирамида. $SO = h$ — высота. $\angle ASB = 2\alpha$.

Для определения объема пирамиды необходимо найти площадь основания. Поскольку пирамида правильная, то в основании ее лежит правильный шестиугольник. Обозначим радиус круга, описанного вокруг шестиугольника, через R, а апофему MO через a. Тогда $AB = R$, $AM = \frac{R}{2}$.

Из прямоугольного $\triangle ASO$ $AS = \sqrt{h^2 + R^2}$. Из прямоугольного $\triangle SMA$ $AS = \frac{R}{2\sin\alpha}$. Приравнивая правые части полученных равенств, имеем

$$\frac{R}{2\sin\alpha} = \sqrt{h^2 + R^2},$$

откуда находим

$$R = \frac{2h \sin \alpha}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}.$$

Апофема MO как высота равностороннего треугольника AOB со стороной R равна

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{h\sqrt{3} \sin \alpha}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}.$$

Площадь основания равна периметру основания, умноженному на половину апофемы, т. е.

$$S_{\text{осн}} = 3Ra = \frac{6\sqrt{3}\, h^2 \sin^2 \alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{2\sqrt{3}\, h^3 \sin^2 \alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

Преобразовав знаменатель

$$1 - 4 \sin^2 \alpha = 4\left(\frac{1}{4} - \sin^2 \alpha\right) = 4(\sin^2 30° - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 4(\sin 30° - \sin \alpha)(\sin 30° + \sin \alpha) = 4 \sin (30° + \alpha) \sin (30° - \alpha),$$

ответ получим в виде

$$V = \frac{\sqrt{3}\, h^3 \sin^2 \alpha}{2 \sin (30° + \alpha) \sin (30° - \alpha)}.$$

№ 14.7. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания равна a, а сторона верхнего основания b. Боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем усеченной пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = b$ (рис. 14.8). Двугранный угол AC равен α. Требуется определить объем пирамиды.

Объем усеченной пирамиды определяется по формуле (14.5). Площадь S нижнего основания равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, поскольку нижнее основание представляет собой равносторонний $\triangle ABC$ со стороной a. Аналогично площадь s верхнего основания равна

$$s = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Высоту пирамиды H найдем из следующих соображений. Проведем $B_1D_1 \perp A_1C_1$ и $D_1D \perp AC$. Тогда BD тоже будет перпен-

дикулярно AC (докажите), и $\angle D_1DB$ будет линейным углом двугранного угла AC, т. е. $\angle D_1DB = \alpha$.

Спроектируем центр O_1 $\triangle A_1B_1C_1$ на плоскость $\triangle ABC$. Поскольку пирамида правильная, то точка O_1 спроектируется в центр $\triangle ABC$. Центр треугольника находится в точке пересечения медиан. Следовательно, $O_1D_1 = \frac{1}{3} D_1B_1$, $OD = \frac{1}{3} DB$. Но $D_1B_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $DB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $O_1D_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Проведем далее $D_1K \perp DB$, тогда

$$DK = DO - KO = DO - D_1O_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b).$$

Из прямоугольного $\triangle DD_1K$

$$D_1K = H = DK \operatorname{tg} \angle D_1DK = \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b) \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляя найденные значения H, S и s в формулу (14.5), получим

$$V = \frac{\sqrt{3}(a - b) \operatorname{tg} \alpha}{18}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}ab}{4}\right) = \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{24}.$$

№ 14.8. Боковая поверхность конуса S. Образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем конуса.

Р е ш е н и е. Пусть боковая поверхность конуса SAB (рис. 14.9) равна S. $\angle SAB = \alpha$. Требуется определить объем конуса.

$S = \pi Rl$, где $R = AO$ — радиус основания, $l = AS$ — образующая.

Из прямоугольного $\triangle ASO$

$$\frac{R}{l} = \cos \alpha, \quad l = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Поэтому

$$S = \frac{\pi R^2}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad R^2 = \frac{S \cos \alpha}{\pi}.$$

Площадь основания равна

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2 = S \cos \alpha.$$

Из $\triangle ASO$ $H = SO = R \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому

$$V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot H}{3} = \frac{S \sin \alpha}{3}\sqrt{\frac{S \cos \alpha}{\pi}}.$$

№ 14.9. В усеченный конус вписан шар радиуса r. Из центра этого шара диаметр большего основания виден под углом α. Найти объем конуса.

Р е ш е н и е. Пусть рис. 14.10 соответствует условию задачи. $\angle AOB = \alpha$, $OM = r$. Требуется определить объем конуса.

Для определения объема конуса необходимо знать радиусы оснований и высоту его. Высота MN равна диаметру вписанного

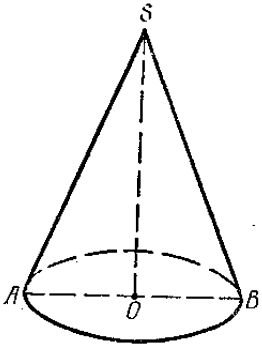


Рис. 14.9.

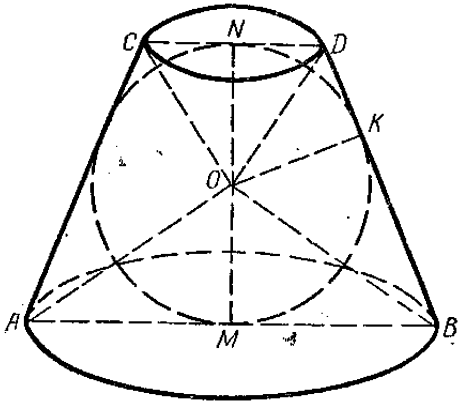


Рис. 14.10.

шара, т. е. $MN = 2r$. Радиус нижнего основания найдем из прямоугольного $\triangle AOM$.

$$\frac{AM}{MO} = \operatorname{tg} \angle AOM, \quad AM = MO \cdot \operatorname{tg} \angle AOM = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Если в точку касания K провести радиус OK, то из равенства $\triangle MOB$ и $\triangle BOK$ следует, что $\angle KOB = \angle BOM = \frac{\alpha}{2}$. Из равенства $\triangle NOD$ и $\triangle DOK$ следует, что $\angle NOD = \angle DOK$. Но $\angle NOK = 180° - \angle KOM = 180° - \alpha$. Следовательно, $\angle NOD = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Тогда из прямоугольного $\triangle NOD$

$$\frac{ND}{ON} = \operatorname{tg} \angle NOD, \text{ т. е. } ND = r \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Согласно формулы (14.9)

$$V = \frac{2\pi r}{3}\left(r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + r^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\pi r^3}{3}\left(\sec^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

№ 14.10. Круговой сектор, дуга которого равна α, вращается вокруг одного из радиусов. Определить объем шара, вписанного в шаровой сектор, образованный вращением данного кругового сектора, если радиус кругового сектора равен R.

Р е ш е н и е. На рис. 14.11 шар O_1 вписан в шаровой сектор $OACB$. $\smile BC = \alpha$, $OA = R$. Требуется определить объем шара O_1.

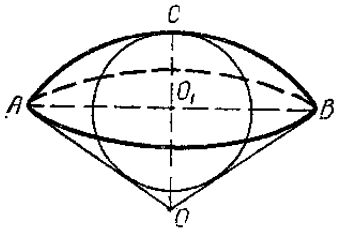


Рис. 14.11.

Обозначим радиус шара O_1 через r. Тогда

$$OO_1 = OC - O_1C = R - r.$$

Из прямоугольного $\triangle OO_1B$

$$\frac{OO_1}{OB} = \cos \angle O_1OB.$$

Но $\angle O_1OB = \alpha$, как центральный угол, опирающийся на $\smile BC = \alpha$.

Поэтому $\frac{R-r}{R} = \cos\alpha$, откуда

$$r = R(1 - \cos\alpha) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По формуле (14.10) объем шара O_1 равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi \cdot 8R^3\sin^6\frac{\alpha}{2}}{3} = \frac{32}{3}\pi R^3\sin^6\frac{\alpha}{2}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Слово тригонометрия происходит от греческих слов τριγωνον (треугольник) и μετρεω (измеряю) и в буквальном переводе означает измерение треугольников. Однако в настоящее время такое название несколько устарело. Тригонометрия это не только наука о решении треугольников, а и наука, которая изучает тригонометрические функции, их свойства и применение.

ЗАНЯТИЕ ПЯТНАДЦАТОЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал

1. Обобщение понятия угла. В геометрии (см. занятие первое) угол определяется как часть плоскости, заключенной между двумя лучами, исходящими из одной точки. Поэтому в геометрии, как правило, рассматриваются углы меньше развернутого, т. е. углы меньше 360°, а при решении треугольников — это даже углы меньше 180°. В то же время сумма внутренних углов многоугольника с числом сторон больше 5 будет больше 360° (например, сумма внутренних углов пятиугольника равна $2d\ (5 - 2) = 540°$).

Ясно, что определение угла, данное в геометрии, недостаточно полное, особенно для изучения вращательных и круговых движений.

Поэтому в тригонометрии угол рассматривается как мера вращения, при котором один луч, вращаясь вокруг вершины угла, переходит в положение другого луча. При этом первый луч OB (рис. 15.1) называют начальной стороной угла, а конечное положение OA второго (подвижного) луча называют конечной стороной угла.

Угол считается положительным, если переход от его начальной стороны к конечной совершается вращением подвижного луча против часовой стрелки, и отрицательным, если такой переход совершается вращением по часовой стрелке.

За единицу измерения углов и дуг, которые описывают при вращении луч и точки, лежащие на этом луче, как и в геометрии примем угол в один градус и дугу в один градус.

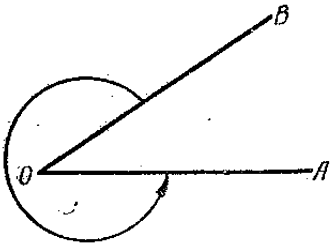


Рис. 15.1.

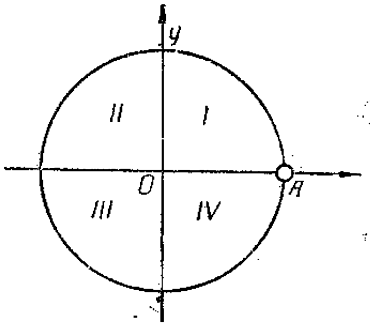


Рис. 15.2.

Градус — это угол или дуга, которые описывают соответственно луч и точки луча при повороте на $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки.

2. Определение тригонометрических функций произвольного угла. Круг с центром в начале координат и радиусом, равным по длине единице, называется единичным кругом, а окружность этого круга — единичной окружностью.

Если на единичной окружности выбрать начальную точку (точка A на рис. 15.2), положительное направление вращения и в качестве единицы масштаба взять радиус окружности, то всякое действительное число a можно изобразить точкой этой единичной окружности. Для этого нужно от точки A отложить дугу, численно равную a.

Таким образом, устанавливается соответствие между действительными числами и точками окружности. По аналогии с числовой осью, такую окружность будем называть числовой окружностью.

Однако полной аналогии между числовой осью и числовой окружностью нет. Числовая ось устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек прямой (т. е. всякому действительному числу соответствует одна единственная точка числовой оси и, наоборот, всякой

точке числовой оси соответствует одно единственное действительное число). Этого нельзя сказать о числовой окружности. В самом деле, каждому действительному числу соответствует одна единственная точка числовой окружности, но каждой точке числовой окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел. Если одно из этих чисел обозначить через α, то все остальные выразятся числами

$$\alpha + 2\pi,\ \alpha + 2 \cdot 2\pi,\ \alpha + 3 \cdot 2\pi,\ \ldots,\ \alpha + n \cdot 2\pi,\ \ldots$$

$$\alpha - 2\pi,\ \alpha - 2 \cdot 2\pi,\ \alpha - 3 \cdot 2\pi,\ \ldots,\ \alpha - n \cdot 2\pi,\ \ldots$$

Величины всех этих чисел можно выразить формулой

$$a_k = \alpha + 2\pi k, \text{ где } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

Координатные оси делят единичный круг и его окружность на четыре равные части, которые называются четвертями, или квадрантами.

Возьмем на единичной окружности произвольную точку M (рис. 15.3) и соединим ее с началом координат. Обозначим $\angle MOA$, который образует радиус OM с начальным радиусом OA, через α. Тогда синусом угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса к длине этого радиуса

$$\sin\alpha = \frac{BM}{OM}. \qquad (15.1)$$

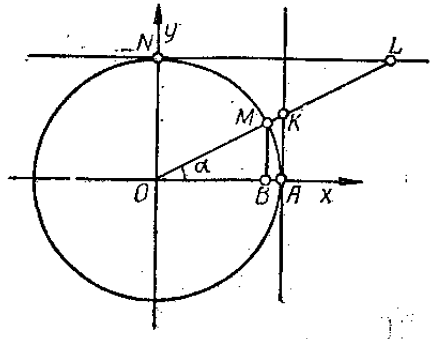


Рис. 15.3.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса к длине этого радиуса

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OM}. \qquad (15.2)$$

Тангенсом угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса к его абсциссе

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MB}{OB}. \qquad (15.3)$$

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса к его ординате

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OB}{MB}. \qquad (15.4)$$

Если точка M будет менять свое положение на окружности, угол α будет менять свое значение. Каждому такому значению α соответствует некоторое значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно, эти величины являются функциями угла α.

Кроме указанных четырех функций иногда рассматриваются еще две — секанс ($\sec\alpha$) и косеканс ($\operatorname{cosec}\alpha$).

Секансом угла α называется отношение длины подвижного радиуса к абсциссе его конца

$$\sec\alpha = \frac{OM}{OB}, \tag{15.5}$$

а косекансом угла α называется отношение длины радиуса к ординате его подвижного конца

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OM}{BM}. \tag{15.6}$$

Легко можно показать, что значения тригонометрических функций не зависят от длины радиуса. Вот почему мы с самого начала ввели в рассмотрение единичную окружность.

Если в формулах (15.1) и (15.2) учесть, что $OM = 1$, то $\sin\alpha = BM$, $\cos\alpha = OB$, т. е. синус и косинус угла α равны соответственно ординате и абсциссе конца подвижного радиуса единичной окружности.

Введем понятие линии тангенсов и линии котангенсов.

Касательная к единичной окружности в конце A горизонтального диаметра называется линией тангенсов.

Продолжим радиус OM до пересечения в точке K с линией тангенсов (рис. 15.3). Тогда согласно определению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MB}{OB}.$$

Но из подобия $\triangle OMB$ и $\triangle OKA$ следует, что $\frac{MB}{OB} = \frac{AK}{OA}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AK}{OK}$, но так как $OA = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha = AK$.

Таким образом, тангенс угла α равен ординате соответствующей точки на линии тангенсов.

Касательная к единичной окружности в конце N вертикального диаметра называется линией котангенсов.

Можно показать, что котангенс угла α равен абсциссе NL соответствующей точки на линии котангенсов (рис. 15.3).

3. Основные тригонометрические тождества. Между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента α существуют

зависимости, которые называются тригонометрическими тождествами. Тригонометрическим тождеством называется такое тригонометрическое равенство, которое выполняется для любых допустимых значений аргумента.

Ниже приводятся так называемые основные тригонометрические тождества.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (15.7)$$

Это равенство непосредственно следует из $\triangle OMB$ (рис. 15.4) по теореме Пифагора.

Разделив (15.1) на (15.2) и (15.2) на (15.1), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad (15.8)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (15.9)$$

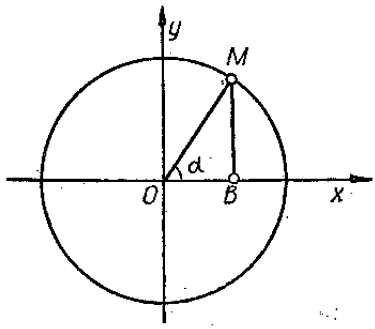


Рис. 15.4.

Сопоставляя равенства (15.1) с (15.6) и (15.2) с (15.5), имеем

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \qquad (15.10)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \qquad (15.11)$$

Из этих пяти тождеств вытекают три вспомогательных

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \qquad (15.12)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad (15.13)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (15.14)$$

Необходимо помнить, что приведенные выше равенства справедливы при всех допустимых значениях аргумента α, т. е. при тех значениях α, при которых левая и правая части имеют смысл.

4. Знаки тригонометрических функций. Так как длина радиуса окружности всегда число положительное, а ордината и абсцисса конца подвижного радиуса могут быть как положительными, так и отрицательными, то и тригонометрические функции могут принимать значения разных знаков, которые сведены в табл. 2.

Не обязательно запоминать приведенную таблицу. Для определения знака тригонометрических функций можно руководствоваться

Таблица 2

Четверти	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

следующими соображениями. Очевидно, знак синуса и косинуса совпадает со знаком ординаты для синуса и абсциссы для косинуса конца подвижного радиуса. Поэтому синус будем положительным, если ордината конца подвижного радиуса отсчитывается вверх от оси Ox, и будет отрицательным, если ордината отсчитывается вниз. Аналогично, косинус будет положительным, если абсцисса конца подвижного радиуса отсчитывается вправо от оси Oy, и будет отрицательным, если абсцисса отсчитывается влево.

Например, определить знаки $\sin 260°$ и $\cos 260°$.

Представим себе мысленно единичную окружность. Угол в 260° оканчивается в третьей четверти. Ордината конца подвижного радиуса будет отрицательна, поэтому $\sin 260° < 0$, абсцисса также будет отрицательная, поэтому $\cos 260° < 0$. Зная знаки синуса и косинуса, легко определить знаки остальных тригонометрических функций.

5. Значения тригонометрических функций некоторых углов. В занятии девятом нами была приведена таблица значений тригонометрических функций некоторых углов. Дополним эту таблицу, введя в рассмотрение углы 0°, 90°, 180°, 270° и 360° (см. табл. 3).

Если $\alpha = 0$, то конец подвижного радиуса имеет абсциссу, равную 1 и ординату, равную 0. Поэтому $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$, $\operatorname{ctg} 0° = \frac{\cos 0°}{\sin 0°}$ не существует.

Если $\alpha = 90°$, то абсцисса и ордината конца подвижного радиуса соответственно равна 0 и 1. Поэтому $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90°$ не существует, $\operatorname{ctg} 90° = 0$.

Аналогично показываем, что $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$, $\operatorname{ctg} 180°$ не существует $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\operatorname{tg} 270°$ не существует, $\operatorname{ctg} 270° = 0$, $\sin 360° = 0$, $\cos 360° = 1$, $\operatorname{tg} 360° = 0$, $\operatorname{ctg} 360°$ не существует.

Таблица 3

Углы α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	1	0	не существ.
90°	1	0	не существ.	0
180°	0	—1	0	не существ.
270°	—1	0	не существ.	0
360°	0	1	0	не существ.

6. Нахождение значений тригонометрических функций по значению одной из них. Основные тригонометрические тождества дают возможность находить значения всех тригонометрических функций, когда известно значение одной из них.

Пусть, например, известно значение $\sin\alpha$. Требуется определить значения всех остальных тригонометрических функций.

Из (15.7) находим $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Знак перед радикалом выбираем тот, который принимает косинус в той четверти, в которой оканчивается угол.

По известным $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ легко находим все остальные функции

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Аналогично выражаются тригонометрические функции и в случае, когда известно значение $\cos\alpha$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Пусть теперь известно значение $\operatorname{tg}\alpha$. Из равенства (15.13) находим $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ или $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Аналогично находятся тригонометрические функции и в случае, когда известно значение $\operatorname{ctg}\alpha$.

ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ

№ 15.1. Найти величину выражений:

а) $\operatorname{tg}^2 60° + 2\operatorname{tg}^2 45°$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \sec^2\frac{\pi}{4}$.

в) $\frac{1}{3}\sin^2 30° - \frac{1}{2}\sec 30°\operatorname{tg}^2 30° + \frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. В заданные выражения подставляем значения тригонометрических функций.

а) $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$. Поэтому $\operatorname{tg}^2 60° + 2\operatorname{tg}^2 45° = (\sqrt{3})^2 + 2\cdot 1 = 3 + 2 = 5$.

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec\frac{\pi}{4} = \sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \sec^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{1}{3}$.

в) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

$$\frac{1}{3}\sin^2 30° - \frac{1}{2}\sec 30°\operatorname{tg}^2 30° + \frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{3} =$$
$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 4 + 48}{12\sqrt{3}} = \frac{44+\sqrt{3}}{12\sqrt{3}}.$$

№ 15.2. Вычислить значения тригонометрических функций угла α, если:

а) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{48}{55}$.

Р е ш е н и е.

а) По формуле (15.7) находим $\cos\alpha$, а затем по формулам (15.8) — (15.11) — все остальные функции.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12\cdot 13}{13\cdot 5} = \frac{12}{5};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{12};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{13}{5};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{13}{12}.$$

б) Совершенно аналогично предыдущему находим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{49}} = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{10}\cdot 7}{7\cdot 3} = \frac{2}{3}\sqrt{10};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2\sqrt{10}}\cdot\sec\alpha = \frac{7}{3};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{7}{2\sqrt{10}}.$$

в) По формуле (15.13) находим $\sec\alpha$, переворачивая его, находим $\cos\alpha$ и т. д.

$$\sec^2\alpha = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4};\quad \cos^2\alpha = \frac{4}{5};\quad \sin^2\alpha = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5};$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \operatorname{ctg}\alpha = 2,\ \sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{5}.$$

г) Этот пример сводится к предыдущему, поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{55}{48},$$

$$\sec^2\alpha = 1+\frac{3025}{2304} = \frac{5329}{2304},\quad \cos^2\alpha = \frac{2304}{5329},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{3025}{5329};\quad \cos\alpha = \frac{48}{73};\quad \sin\alpha = \frac{55}{73};$$

$$\sec\alpha = \frac{73}{48};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{73}{55}.$$

№ 15.3. Найти $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = a$.

Р е ш е н и е. Возведем обе части данного равенства в квадрат.

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = a^2,$$

откуда находим

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

или

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

№ 15.4. Проверить тождество

$$\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть

$$\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \sec^2 \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

№ 15.5. Упростить выражение

$$\lg (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2 \lg \cos \alpha.$$

Р е ш е н и е. Обозначим данное выражение через A и пропотенцируем

$$A = \lg (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \lg \cos^2 \alpha = \lg (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= \lg \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha \right) = \lg 1 = 0.$$

Итак,

$$\lg (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2 \lg \cos \alpha = 0.$$

№ 15.6. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$; б) $\dfrac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$;

в) $\dfrac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$; г) $\sin^4 \beta - \cos^4 \beta + \cos^2 \beta$.

Р е ш е н и е.

а) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \dfrac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \dfrac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha.$

б) $\dfrac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \dfrac{2 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha} =$

$$= \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 1.$$

в) $\dfrac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \dfrac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) + \cos \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} =$

$$= \frac{1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{2 (1 - \sin^2 \alpha)}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{2(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 2(\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha).$$

г) $\sin^4\beta - \cos^4\beta + \cos^2\beta = (\sin^2\beta)^2 - (\cos^2\beta)^2 + \cos^2\beta =$
$= (\sin^2\beta + \cos^2\beta)(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + \cos^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\beta +$
$+ \cos^2\beta = \sin^2\beta.$

№ 15.7. Упростить выражения:

а) $3(\sin^4\beta + \cos^4\beta) - 2(\sin^6\beta + \cos^6\beta)$;

б) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

в) $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} : \frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}$.

Решение.

а) $3(\sin^4\beta + \cos^4\beta) - 2(\sin^6\beta + \cos^6\beta) =$
$= 3\sin^4\beta + 3\cos^4\beta - 2[(\sin^2\beta)^3 + (\cos^2\beta)^3] =$
$= 3\sin^4\beta + 3\cos^4\beta - 2(\sin^2\beta + \cos^2\beta)(\sin^4\beta - \sin^2\beta\cos^2\beta + \cos^4\beta) =$
$= 3\sin^4\beta + 3\cos^4\beta - 2(\sin^4\beta - \sin^2\beta\cos^2\beta + \cos^4\beta) =$
$= 3\sin^4\beta + 3\cos^4\beta - 2\sin^4\beta + 2\sin^2\beta\cos^2\beta - 2\cos^4\beta =$
$= \sin^4\beta + \cos^4\beta + 2\sin^2\beta\cos^2\beta = (\sin^2\beta + \cos^2\beta)^2 = 1.$

б) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}} + \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} =$

$= \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}\sqrt{1+\cos\alpha}} =$

$= \frac{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2} + \sqrt{(1-\cos\alpha)^2}}{\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}} = \frac{1+\cos\alpha+1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{\sin^2\alpha}} = 2\operatorname{cosec}\alpha.$

в) $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} : \frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} : \frac{1+\frac{1}{\cos\alpha}}{1+\frac{1}{\sin\alpha}} =$

$$= \frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} : \frac{(\cos\alpha+1)\sin\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+1)} = \frac{(1-\sin\alpha)(\sin\alpha+1)\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(\cos\alpha+1)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha}{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\sin\alpha} = \frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha} = \operatorname{ctg}^3\alpha.$$

№ 15.8. Вычислить $\frac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, если $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, то $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ и

$$\frac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{5-1}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

№ 15.9. Вычислить $3\cos\alpha + 2\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{5}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$, то $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1+\frac{9}{25}$, $\operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{34}{25}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{34}}{5}$. Но $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, поэтому $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$ и

$$3\cos\alpha + 2\sin\alpha = 3\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} + 2\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{19}{\sqrt{34}}.$$

№ 15.10. Показать, что если $\sin x + \operatorname{tg} x = m$, $\sin x - \operatorname{tg} x = -n$, то $\cos x = \frac{m-n}{m+n}$.

Р е ш е н и е. Складывая, а затем вычитая почленно данные равенства, получим

$$2\sin x = m-n, \text{ или } \sin x = \frac{m-n}{2};$$

$$2\operatorname{tg} x = m+n, \text{ или } \operatorname{tg} x = \frac{m+n}{2}.$$

Поскольку $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то

$$\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}; \quad \frac{m-n}{2} : \frac{m+n}{2} = \frac{m-n}{m+n}.$$

№ 15.11. Доказать тождества:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

б) $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x-\cos^2 x\sin x}{\cos x-\cos^3 x}$; в) $\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1-\cos^4 x}{\cos^2 x}$;

г) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$.

Р е ш е н и е. Доказать тригонометрическое тождество, значит показать, что левая часть равенства равняется правой при любых допустимых значениях аргумента. Обычно для доказательства тождества берут любую ее часть (левую или правую) и производят над ней такие преобразования, используя известные тригонометрические тождества, чтобы в результате получилось выражение, стоящее в другой части. При этом, как правило, выбирают для преобразования ту часть равенства, которая имеет более сложный вид. Иногда одновременно преобразовывают обе части до тех пор, пока не получат в обеих частях очевидно равные выражения.

Проиллюстрируем вышеизложенное на приведенных примерах.

а) Будем преобразовывать левую часть.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}=$$

$$=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Тождество доказано.

б) В правой части равенства вынесем за скобки $\sin x$ в числителе и $\cos x$ в знаменателе

$$\frac{\sin x-\cos^2 x\sin x}{\cos x-\cos^3 x}=\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x(1-\cos^2 x)}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x.$$

в) Будем преобразовывать правую часть. Для этого выражение, стоящее в числителе, разложим как разность квадратов

$$\frac{1-\cos^4 x}{\cos^2 x}=\frac{(1+\cos^2 x)(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{(1+\cos^2 x)\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 x.$$

г) Преобразовываем левую часть.

$$\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+$$

$$+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\sin^3\alpha\,\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^3\alpha\,\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\sin^2\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha)=$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

№ 15.12. Доказать тождества:

а) $\dfrac{2\sin x-1}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}=\operatorname{cosec} x$;

б) $\dfrac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$.

Решение.

а) $$\frac{2\sin x-1}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{2\sin x-1}{1-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin x-1}{\sin^2 x+\sin^2 x-\sin x}=\frac{2\sin x-1}{2\sin^2 x-\sin x}=\frac{2\sin x-1}{\sin x\,(2\sin x-1)}=$$

$$=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x.$$

б) Разделим числитель и знаменатель левой части на выражение $\cos x\cos y$. Тогда

$$\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$

ЗАНЯТИЕ ШЕСТНАДЦАТОЕ

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Теоретический материал

1. Четность и нечетность тригонометрических функций. Функция $y=f(x)$ называется четной, если значение y не изменяется при замене x на $-x$, т. е. функция $y=f(x)$ называется четной, если $f(-x)=f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если при замене x на $-x$ y меняет свое значение на противоположное, т. е. функция $y = f(x)$ называется нечетной, если

$$f(-x) = -f(x).$$

Из тригонометрических функций $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ являются четными, а $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — нечетными, т. е.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \tag{16.1}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \tag{16.2}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{16.3}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{16.4}$$

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha; \tag{16.5}$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \tag{16.6}$$

Эти формулы позволяют тригонометрические функции отрицательного аргумента приводить к функциям положительного аргумента. Доказываются они легко с помощью теорем сложения, к изложению которых мы сейчас переходим.

2. Теорема сложения. Теоремы сложения позволяют, зная значения тригонометрических функций двух аргументов α и β, вычислять значения тригонометрических функций от суммы $\alpha + \beta$ и разности $\alpha - \beta$ этих аргументов.

Они выражаются формулами

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \tag{16.7}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \tag{16.8}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{16.9}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{16.10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \tag{16.11}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{16.12}$$

Формулы (16.11) и (16.12) имеют смысл при тех значениях α, β и $\alpha + \beta$, при которых $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos(\alpha + \beta)$ не обращается в нуль.

3. Формулы приведения. Формулы, при помощи которых тригонометрические функции произвольного угла можно выразить через тригонометрические функции острого угла, называются формулами приведения.

Выразим для примера $\sin 260°$ через синус острого угла. $\sin 260° = \sin (270° - 10°)$. Согласно равенству (16.8)

$$\sin (270° - 10°) = \sin 270° \cos 10° - \cos 270° \sin 10°.$$

Учитывая, что

$$\sin 270° = -1, \quad \cos 270° = 0,$$

получим

$$\sin (270° - 10°) = -\cos 10°.$$

Таким образом,

$$\sin 260° = -\cos 10°.$$

Делая подобные выкладки в общем виде, получим одну из формул приведения

$$\sin (270° - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Аналогично доказываются и остальные формулы приведения, сводная таблица которых имеется в любом учебнике по тригонометрии.

Мы не воспроизводим здесь этой таблицы, поскольку нет никакой необходимости ее запоминать. Следует лишь уяснить себе принципы составления формул приведения. Принципы эти следующие.

Если острый угол α отсчитывается от горизонтального диаметра (т. е. если аргумент имеет вид $180° \pm \alpha$ или $360° \pm \alpha$), то функция не меняет своего наименования; если же отсчет ведется от вертикального диаметра (т. е. если аргумент имеет вид $90° \pm \alpha$ или $270 \pm \alpha$), то тригонометрическая функция меняет свое наименование на сходную (синус меняется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот).

Для определения знака правой части формулы приведения достаточно определить знак левой части и приписать его к правой части.

Например, составить формулу приведения для $\cos (270° + \alpha)$.

Согласно вышеизложенному в правой части будет стоять выражение $\sin \alpha$ (так как отсчет ведется от вертикального диаметра), взятое со знаком плюс, поскольку угол $270°$ оканчивается в четвертой четверти, где косинус — положительный, т. е.

$$\cos (270° + \alpha) = \sin \alpha.$$

4. Формулы удвоения и деления аргумента пополам. Положив в формулах (16.7), (16.9) и (16.11) $\beta = \alpha$, получим формулы удвоения аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \qquad (16.13)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{16.14}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{16.15}$$

Эти формулы дают возможность по известным значениям тригонометрических функций аргумента α находить значения тригонометрических функций аргумента 2α.

Покажем теперь, как получаются формулы деления аргумента пополам, т. е. формулы, с помощью которых тригонометрические функции половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ выражаются через тригонометрические функции целого аргумента α.

Согласно формуле (16.14)

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Присоединим к этому равенству тригонометрическую единицу

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Сложив эти два равенства, получим

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \tag{16.16}$$

Вычитая со второго равенства первое, получим

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{16.17}$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \tag{16.18}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \tag{16.19}$$

Знаки перед радикалами в формулах (16.16) — (16.19) выбираются в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол $\frac{\alpha}{2}$.

5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение. Формулы, преобразующие

произведение тригонометрических функций в сумму, имеют вид

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]; \qquad (16.20)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]; \qquad (16.21)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (16.22)$$

Формулы эти легко получаются из формул (16.7) — (16.10). Так, например, чтобы получить, формулу (16.21) достаточно из равенства (16.10) вычесть равенство (16.9) и результат разделить на 2.

Существуют и обратные формулы, которые позволяют преобразовывать сумму тригонометрических функций в произведение. Они имеют вид

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (16.23)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (16.24)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (16.25)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (16.26)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad (16.27)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (16.28)$$

Для доказательства этих формул достаточно правые части их преобразовать в сумму.

6. Некоторые специальные приемы преобразования тригонометрических выражений. Рассмотрим в этом пункте два вопроса: преобразование в произведение выражений вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ и выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

Пусть требуется преобразовать в произведение сумму

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha.$$

Преобразуем эту сумму следующим образом:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Величины $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ по абсолютному значению не

превышают единицы. Кроме того, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$. Таким образом, эти величины представляют собой косинус и синус некоторого угла φ. Тогда $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\times\times\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)$ и окончательно имеем

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi). \qquad (16.29)$$

Угол φ называется вспомогательным аргументом и определяется из равенств

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

При преобразовании тригонометрических выражений и, особенно, при решении тригонометрических уравнений полезно уметь выражать тригонометрические функции аргумента α через тангенс половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$.

Формулы эти получаются следующим образом:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad (16.30)$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad (16.31)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad (16.32)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \qquad (16.33)$$

ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ

№ 16.1. Определить значение выражений:

а) $(2\operatorname{tg}45^\circ - \cos 270^\circ + \sin 180^\circ)\cos 60^\circ$;

б) $(2\sin 45^\circ + 3\cos 45^\circ - \sin 270^\circ + \operatorname{tg}45^\circ)\sin 60^\circ$;

в) $2\sin 90^\circ\cos\alpha + \sin 30^\circ\sin\alpha - \cos 270^\circ\cos\alpha$.

Р е ш е н и е. При решении этих примеров, нужно в выражение, подлежащее определению, подставить известные значения тригонометрических функций.

а) Учитывая, что $\operatorname{tg}45^\circ = 1$, $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, получаем

$$(2\operatorname{tg}45^\circ - \cos 270^\circ + \sin 180^\circ)\cos 60^\circ = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Аналогично:

б) $(2\sin 45^\circ + 3\cos 45^\circ - \sin 270^\circ + \operatorname{tg}45^\circ)\sin 60^\circ = \left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) + 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{4} + \sqrt{3}.$

в) $2\sin 90^\circ\cos\alpha + \sin 30^\circ\sin\alpha - \cos 270^\circ\cos\alpha = 2\cdot 1\cdot\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - 0\cdot\cos\alpha = 2\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$.

№ 16.2. Пользуясь формулами приведения, упростить выражения:

а) $\cos(180^\circ + \alpha)\cos(270^\circ - \beta) - \sin(180^\circ - \alpha)\cos(270^\circ + \beta)$;

б) $\dfrac{1 - \sin^2(270^\circ + \alpha)}{1 - \sin^2(180^\circ + \alpha)}$;

в) $\dfrac{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)\sin(90^\circ - \beta)}{\cos(180^\circ - \beta)\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}$.

Р е ш е н и е. Напоминаем, что при составлении формул приведения функция остается неизменной, если отсчет острого угла ведется от горизонтального диаметра, и меняется на сходственную ей, если отсчет ведется от вертикального диаметра. Знак результата совпадает со знаком исходной функции исходного угла. Например:

а) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$. Знак минус взят потому, что угол $180^\circ + \alpha$ оканчивается в третьей четверти, где косинус отрицательный.

$$\cos(270^\circ - \beta) = -\sin\beta;\ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(270^\circ + \beta) = \sin\beta.$$

Поэтому

$$\cos(180^\circ + \alpha)\cos(270^\circ - \beta) - \sin(180^\circ - \alpha)\cos(270^\circ + \beta) =$$
$$= (-\cos\alpha)(-\sin\beta) - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$
$$= \sin\beta(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Аналогично решаются остальные примеры.

б) $\dfrac{1-\sin^2(270^\circ+\alpha)}{1-\sin^2(180^\circ+\alpha)} = \dfrac{1-(-\cos\alpha)^2}{1-(-\sin\alpha)^2} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha;$

в) $\dfrac{\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)}{\cos(180^\circ-\beta)\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cos\beta}{(-\cos\beta)(-\operatorname{tg}\alpha)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cos\beta}{\cos\beta\operatorname{tg}\alpha} = 1.$

№ 16.3. Пользуясь формулами приведения и учитывая четность и нечетность тригонометрических функций, упростить выражения:

а) $\dfrac{[1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)]\operatorname{tg}(\alpha-90^\circ)}{[1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-360^\circ)]\operatorname{ctg}(\alpha+90^\circ)};$

б) $\dfrac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\operatorname{tg}^2(\beta+270^\circ)} + \dfrac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(\beta-270^\circ)}.$

Р е ш е н и е.

а) Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — нечетные, т. е. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Поэтому

$$\operatorname{ctg}(\alpha-270^\circ) = -\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha),\ \operatorname{tg}(\alpha-90^\circ) = -\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)$$
$$\text{и } \operatorname{ctg}(\alpha-360^\circ) = -\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha).$$

Учитывая это и применяя формулы приведения, получаем

$$\frac{[1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)]\operatorname{tg}(\alpha-90^\circ)}{[1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-360^\circ)]\operatorname{ctg}(\alpha+90^\circ)} =$$
$$= \frac{\{1-[-\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)]^2\}[-\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)]}{\{1-[-\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)]^2\}\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)} =$$
$$= -\frac{[1-\operatorname{ctg}^2(270^\circ-\alpha)]\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{[1-\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)]\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)} = -\frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha}{(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)(-\operatorname{tg}\alpha)} =$$
$$= \frac{\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\left(1-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha\sin\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\sin\alpha} = -1.$$

б) Косинус — функция четная. Поэтому $\cos(\alpha-270^\circ) = \cos(270^\circ-\alpha)$ и

$$\frac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\operatorname{tg}^2(\beta+270^\circ)} + \frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(\beta-270^\circ)} = \frac{\cos^2(270^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(270^\circ+\beta)} +$$

$$+\frac{\sin^2(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(270^\circ-\beta)}=\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{tg}^2\beta}=$$

$$=\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta.$$

№ 16.4. Доказать тождества, принимая во внимание, что $\alpha+\beta=90^\circ$:

а) $\sin^2(\alpha-270^\circ)+\cos^2(\beta-270^\circ)=2\sin^2\beta$;

б) $\dfrac{\sin^2(\alpha+180^\circ)}{\operatorname{ctg}(-\beta)}+\dfrac{\operatorname{ctg}^2(270^\circ-\beta)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-180^\circ)}=1-\sin\alpha\cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin 750^\circ\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)\cos(270^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)\sec(270^\circ+\alpha)}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha\sin\alpha$.

Р е ш е н и е.

а) $\sin^2(\alpha-270^\circ)+\cos^2(\beta-270^\circ)=\sin^2(270^\circ-\alpha)+$

$$+\cos^2(270^\circ-\beta)=\cos^2\alpha+\sin^2\beta.$$

Но $\alpha=90^\circ-\beta$. Поэтому

$$\cos^2\alpha+\sin^2\beta=\cos^2(90^\circ-\beta)+\sin^2\beta=\sin^2\beta+$$

$$+\sin^2\beta=2\sin^2\beta.$$

б) $\dfrac{\sin^2(\alpha+180^\circ)}{\operatorname{ctg}(-\beta)}+\dfrac{\operatorname{ctg}^2(270^\circ-\beta)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-180^\circ)}=\dfrac{\sin^2(180^\circ+\alpha)}{-\operatorname{ctg}\beta}+$

$$+\frac{\operatorname{ctg}^2(270^\circ-\beta)}{\operatorname{ctg}^2(180^\circ-\alpha)}=\frac{-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}^2(90^\circ-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{-\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+$$

$$+\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}+1=1-\sin\alpha\cos\alpha.$$

в) $\sin 750^\circ=\sin(720^\circ+30^\circ)=\sin(2\cdot360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$, $\cos(270^\circ-\alpha)=$

$=-\sin\alpha$, $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, $\sec(270^\circ+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$.

Учитывая все это, преобразовываем левую часть

$$\frac{\frac{1}{2}(-\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha(-\sin\alpha)}{\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha\sin\alpha.$$

№ 16.5. Пользуясь теоремами сложения, упростить выражения:

а) $\sin(\alpha+30^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$;

б) $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$;

в) $\cos(x-y)-2\cos x\cos y$;

г) $\dfrac{\sin(x-y)-2\sin x\cos y}{\cos(x-y)-2\cos x\cos y}$.

Р е ш е н и е.

а) Применяя формулы (16.7) и (16.9), получаем

$$\sin(\alpha+30^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)=\sin\alpha\cos 30^\circ+\cos\alpha\sin 30^\circ-$$
$$-\cos\alpha\cos 60^\circ+\sin\alpha\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-$$
$$-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha.$$

б) Непосредственно применяя формулы (16.11) и (16.12), имеем

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}=$$
$$=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)}=$$
$$=\frac{1+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1-2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=$$
$$=2\,\frac{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=2\,\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}.$$

в) $\cos(x-y)-2\cos x\cos y=\cos x\cos y+\sin x\sin y-$
$$-2\cos x\cos y=-\cos x\cos y+\sin x\sin y=$$
$$=-(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=-\cos(x+y).$$

г) $$\frac{\sin(x-y)-2\sin x\cos y}{\cos(x-y)-2\cos x\cos y}=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y-2\sin x\cos y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y-2\cos x\cos y}=$$
$$=\frac{-\sin x\cos y-\cos x\sin y}{-\cos x\cos y+\sin x\sin y}=\frac{-(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}{-(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}=$$
$$=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\operatorname{tg}(x+y).$$

№ 16.6. Доказать справедливость тождеств:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}=\dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(x+y)+\cos(x-y)}{\sin(x-y)+\cos(x+y)}=\dfrac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}$.

Р е ш е н и е.

а) Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

б) $$\frac{\sin(x+y)+\cos(x-y)}{\sin(x-y)+\cos(x+y)}=$$

$$=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y+\cos x\cos y-\sin x\sin y}=$$

$$=\frac{(\sin x\cos y+\cos x\cos y)+(\cos x\sin y+\sin x\sin y)}{(\sin x\cos y+\cos x\cos y)-(\cos x\sin y+\sin x\sin y)}=$$

$$=\frac{\cos y(\sin x+\cos x)+\sin y(\cos x+\sin x)}{\cos y(\sin x+\cos x)-\sin y(\cos x+\sin x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos y+\sin y)}{(\cos x+\sin x)(\cos y-\sin y)}=\frac{\cos y+\sin y}{\cos y-\sin y}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos y$. Тогда

$$\frac{\cos y+\sin y}{\cos y-\sin y}=\frac{\dfrac{\cos y}{\cos y}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{\dfrac{\cos y}{\cos y}-\dfrac{\sin y}{\cos y}}=\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}.$$

№ 16.7. По данному значению $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ вычислить $\cos 2\alpha$.

Р е ш е н и е. Для нахождения величины $\cos 2\alpha$ нужно в формулу $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ подставить значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Согласно условию $\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Следовательно, $\cos 2\alpha=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$.

№ 16.8. Вычислить $\sin 6x$, если $\sin 3x=\frac{3}{7}$, причем $3x$ — угол острый.

Р е ш е н и е. Согласно формулы (16.13)

$$\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x.$$

Но $\cos 3x = \sqrt{1 - \sin^2 3x} = \sqrt{1 - \frac{9}{49}} = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{\sqrt{40}}{7}$.

Поэтому

$$\sin 6x = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{\sqrt{40}}{7} = \frac{12\sqrt{10}}{49}.$$

№ 16.9. Определить $\operatorname{tg} 2y$, если $\operatorname{ctg} y = m$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{tg} 2y = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 y}$, но $\operatorname{tg} y = \frac{1}{\operatorname{ctg} y} = \frac{1}{m}$. Поэтому

$$\operatorname{tg} 2y = \frac{2 \cdot \frac{1}{m}}{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^2} = \frac{2m^2}{m(m^2 - 1)} = \frac{2m}{m^2 - 1}.$$

№ 16.10. Определить тригонометрические функции угла A, если $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, причем угол $\frac{A}{2}$ расположен в первой четверти.

Р е ш е н и е. По данному значению $\sin \frac{A}{2}$, находим $\cos \frac{A}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2 \cdot 9}{3(9 - 1)} = \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \frac{4}{3}; \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}; \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}.$$

№ 16.11. Вычислить выражения:

а) $3\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \cos^4 15^\circ}$;

б) $\sec^2 15^\circ + \operatorname{cosec}^2 15^\circ$.

Р е ш е н и е.

а) $3\sin 15^\circ \cos 15^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \cos^4 15^\circ} = \frac{3}{2} 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ +$

$+ \frac{\sin 60^\circ}{(\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ)(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)} = \frac{3}{2}\sin 30^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ} =$

$= \frac{3}{2}\sin 30^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$;

б) $\sec^2 15^\circ + \operatorname{cosec}^2 15^\circ = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} + \frac{1}{\sin^2 15^\circ} =$

$= \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ} = \frac{1}{\cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 4\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} =$

$= \frac{4}{(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2} = \frac{4}{\sin^2 30^\circ} = \frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16.$

№ 16.12. Доказать тождества:

а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$;

б) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$;

в) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1$;

г) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

Р е ш е н и е.

а) Будем преобразовывать правую часть

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha) + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha.$$

б) Преобразуем левую часть

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2-$$
$$-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+$$
$$+\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta-$$
$$-\cos^2\alpha\sin^2\beta=4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

в) Аналогично предыдущему имеем

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta=$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2-$$
$$-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=\cos^2\alpha\cos^2\beta-$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta+$$
$$+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta+$$
$$+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta=$$
$$=(\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta)+(\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta)=$$
$$=\cos^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1.$$

г) $$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}45^\circ=1$, то

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$$

№ 16.13. Определить $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $\cos x=m$, причем x — угол первой четверти.

Решение. Непосредственно по формулам (16.16)—(16.18) находим

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+m}{2}},\quad \sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-m}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$$

№ 16.14. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

а) $1-\sin 20^\circ$;

б) $1-2\cos x+\cos 2x$;

в) $2\cos\alpha+\sin 2\alpha$.

Р е ш е н и е. Из алгебры известно, что применение логарифмов при вычислениях намного сокращает объем работы, так как заменяет умножение чисел сложением их логарифмов, деление — вычитанием, возвышение в степень — умножением, извлечение корня — делением.

Однако, чтобы воспользоваться логарифмами, необходимо, чтобы выражение, подлежащее вычислению, могло быть прологарифмировано, т. е. чтобы оно не содержало действий сложения и вычитания. Любое тригонометрическое выражение с помощью тождественных преобразований может быть преобразовано к виду не содержащему действий сложения и вычитания. Такое преобразование тригонометрических выражений называется приведением его к виду, удобному для логарифмирования.

а) Выражения вида $1 \pm \cos\alpha$ приводятся к виду удобному для логарифмирования с помощью тригонометрических функций половинного аргумента

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$1 - \sin 20^\circ = 1 - \sin(90^\circ - 70^\circ) = 1 - \cos 70^\circ = 2\sin^2 35^\circ.$$

б) $1 - 2\cos x + \cos 2x = 1 + \cos 2x - 2\cos x =$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos x = 2\cos x(\cos x - 1) = -2\cos x(1 - \cos x) =$$

$$= -2\cos x\, 2\sin^2\frac{x}{2} = -4\cos x\sin^2\frac{x}{2}.$$

в) $2\cos\alpha + \sin 2\alpha = 2\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha(1 + \sin\alpha) =$

$$= 2\cos\alpha[1 + \cos(90^\circ - \alpha)] = 2\cos\alpha\, 2\cos^2\frac{90^\circ - \alpha}{2} =$$

$$= 4\cos\alpha\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

№ 16.15. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

а) $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg} 2x - \cos 2x}{\operatorname{ctg} 2x + \cos 2x}$;

в) $(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x)\cos x \sin 3x$;

г) $\sin 2x + \cos 2x \operatorname{tg} 3x$; д) $\cos x - \sin x \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Р е ш е н и е.

а) $\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\dfrac{2\sin x-2\sin x\cos x}{2\sin x+2\sin x\cos x}=\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)}=$

$=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}.$

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}2x-\cos 2x}{\operatorname{ctg}2x+\cos 2x}=\dfrac{\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}-\cos 2x}{\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}+\cos 2x}=\dfrac{\cos 2x-\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x+\sin 2x\cos 2x}=$

$=\dfrac{\cos 2x(1-\sin 2x)}{\cos 2x(1+\sin 2x)}=\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\dfrac{1-\cos(90^\circ-2x)}{1+\cos(90^\circ-2x)}=$

$=\dfrac{2\sin^2(45^\circ-x)}{2\cos^2(45^\circ-x)}=\operatorname{tg}^2(45^\circ-x).$

в) $(1+\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}3x)\cos x\sin 3x=\left(1+\dfrac{\sin x\cos 3x}{\cos x\sin 3x}\right)\cos x\sin 3x=$

$=\dfrac{\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x}{\cos x\sin 3x}\cos x\sin 3x=\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x=$

$=\sin(3x+x)=\sin 4x.$

г) $\sin 2x+\cos 2x\operatorname{tg}3x=\sin 2x+\dfrac{\cos 2x\sin 3x}{\cos 3x}=$

$=\dfrac{\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x}{\cos 3x}=\dfrac{\sin(2x+3x)}{\cos 3x}=\dfrac{\sin 5x}{\cos 3x}.$

д) $\cos x-\sin x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\cos x\cos\dfrac{x}{2}-\sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}=$

$\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{3}{2}x}{\cos\dfrac{x}{2}}.$

№ 16.16. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

а) $\sin 42^\circ-\sin 18^\circ$; б) $\cos 3\alpha+\cos\alpha$; в) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$;

г) $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; д) $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}$.

Р е ш е н и е. Для преобразования этих выражений нужно воспользоваться формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение (16.23) — (16.26).

а) $\sin 42^\circ - \sin 18^\circ = 2\cos\frac{42^\circ + 18^\circ}{2}\sin\frac{42^\circ - 18^\circ}{2} =$

$= 2\cos 30^\circ \sin 12^\circ = \sqrt{3}\sin 12^\circ;$

б) $\cos 3\alpha + \cos\alpha = 2\cos\frac{3\alpha + \alpha}{2}\cos\frac{3\alpha - \alpha}{2} = 2\cos 2\alpha\cos\alpha;$

в) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2};$

г) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2};$

д) $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x-y}{2}.$

№ 16.17. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

а) $\cos 5\alpha + \sin 2\alpha$; б) $\sin(x+y) + \cos x$; в) $\frac{\sin\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \cos\alpha}$.

Р е ш е н и е. Выражения вида $\sin\alpha \pm \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$ приводятся к сумме или разности одноименных функций, если одну из функций по формулам приведения заменить ей сходственной. Например, $\sin\alpha \pm \cos\beta = \sin\alpha \pm \sin(90^\circ - \beta)$ и т. д.

а) $\cos 5\alpha + \sin 2\alpha = \cos 5\alpha + \cos(90^\circ - 2\alpha) =$

$= 2\cos\frac{5\alpha + 90^\circ - 2\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha - 90^\circ + 2\alpha}{2} =$

$= 2\cos\left(45^\circ + \frac{3}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{7}{2}\alpha - 45^\circ\right) =$

$= 2\cos\left(45^\circ + \frac{3}{2}\alpha\right)\cos\left(45^\circ - \frac{7}{2}\alpha\right).$

б) $\sin(x+y) + \cos x = \sin(x+y) + \sin(90^\circ - x) =$

$= 2\sin\frac{x + y + 90^\circ - x}{2}\cos\frac{x + y - 90^\circ + x}{2} =$

$$= 2\sin\left(45^\circ + \frac{y}{2}\right)\cos\left(x + \frac{y}{2} - 45^\circ\right) =$$

$$= 2\sin\left(45^\circ + \frac{y}{2}\right)\cos\left(45^\circ - x - \frac{y}{2}\right).$$

в) $$\frac{\sin\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \sin(90^\circ - \beta)}{\sin\beta - \sin(90^\circ - \alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos\dfrac{\alpha + 90^\circ - \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - 90^\circ + \beta}{2}}{2\cos\dfrac{\beta + 90^\circ - \alpha}{2}\sin\dfrac{\beta - 90^\circ + \alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\left(45^\circ + \dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2} - 45^\circ\right)}{\cos\left(45^\circ + \dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2} - 45^\circ\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(45^\circ + \dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - 45^\circ - \dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\left(45^\circ + \dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ + \dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

№ 16.18. Доказать справедливость равенств:

а) $\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ$.

б) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$.

Р е ш е н и е. При решении этих примеров следует воспользоваться формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (16.20) — (16.22).

а) $$\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}[\cos(35^\circ - 55^\circ) - \cos(35^\circ + 55^\circ)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 90^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ.$$

б) $$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)\sin 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 60^\circ \sin 50^\circ -$$

$$\frac{1}{2}\cos 80^\circ \sin 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 50^\circ - \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 50° - \frac{1}{4}(\cos 40° - \cos 60°) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(90° - 50°) - \frac{1}{4}\cos 40° + \frac{1}{4}\cos 60° =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 40° - \frac{1}{4}\cos 40° + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

№ 1 .19. Доказать тождества:

а) $\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \sec\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$;

б) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$;

в) $\frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha - 4 + 4\sin^4\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

Р е ш е н и е.

а) Преобразуем левую часть равенства

$$\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \sec\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 1 + \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1 + \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{90° + \frac{\alpha}{2}}{2} = 2\cos^2\left(45° + \frac{\alpha}{4}\right).$$

б) Для доказательства этого тождества сумму первых двух слагаемых преобразуем в произведение, а третье слагаемое распишем как синус двойного аргумента.

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta) - \sin(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right) =$$

$$= -4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}.$$

в) Преобразуем левую часть равенства

$$\frac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha - 4 + 4\sin^4\alpha} = \frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha}{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 - 4(1-\sin^4\alpha)} =$$

$$= \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - 4(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{-4\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)} = \frac{-4\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha - 1 - \sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{-4\sin^4\alpha}{-4\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha.$$

г) $$\frac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha}{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)(2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2 a)} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \sin 2\alpha.$$

№ 16.20. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

а) $\sin\alpha\sin 7\alpha - \sin 3\alpha\sin 5\alpha$;

б) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$;

в) $\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.

Решение.

а) $$\sin\alpha\sin 7\alpha - \sin 3\alpha\sin 5\alpha = \frac{1}{2}[\cos(-6\alpha) - \cos 8\alpha] -$$

$$- \frac{1}{2}[\cos(-2\alpha) - \cos 8\alpha] = \frac{1}{2}(\cos 6\alpha - \cos 2\alpha) =$$

$$= -\sin 4\alpha\sin 2\alpha.$$

б) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = (\cos 2\alpha + \cos 8\alpha) - (\cos 4\alpha + \cos 6\alpha) = 2\cos 5\alpha\cdot\cos 3\alpha - 2\cos 5\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cos 5\alpha(\cos 3\alpha - \cos\alpha) = 2\cos 5\alpha(-2\sin 2\alpha\sin\alpha) = -4\cos 5\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha.$

в) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha) - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} -$

$$- \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} - 1 \right) + \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} - 1 \right) =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha} \right) = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 3\alpha.$$

№ 16.21. Найти $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

Р е ш е н и е. Возведем обе части данного равенства в куб

$$\sin^3\alpha + 3\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha = a^3.$$

Преобразуем полученное равенство следующим образом:

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = a^3.$$

Способом, изложенным в примере № 15.3, находим

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Поэтому

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = a^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) =$$

$$= a^3 - \frac{3(a^2 - 1)}{2} a = \frac{3a - a^3}{2}.$$

№ 16.22. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$, то

$$\sin(\alpha + \beta) = 3\sin(\alpha - \beta).$$

Р е ш е н и е. Требуется доказать, что второе условие выполняется, если выполняется первое условие. Обе части равенства $\sin(\alpha + \beta) = 3\sin(\alpha - \beta)$ разделим на $\sin(\alpha - \beta)$ (это возможно, так как $\alpha \neq \beta$) и докажем, что если

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta, \quad \text{то} \quad \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = 3.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства следующим образом:

$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} =$ (разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha\sin\beta$) $= \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}$. Воспользуемся равенством

$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$ и окончательно получим

$$\frac{2\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta+1}{2\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta-1}=\frac{2+1}{2-1}=3.$$

№ 16.23. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$.

Р е ш е н и е. Обозначим $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = x$ и возведем обе части равенств

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m,$$
$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = x$$

в квадрат

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = m^2, \quad \operatorname{tg}^2\alpha + 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = m^2,$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = x^2 \text{ или } \operatorname{tg}^2\alpha - 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = x^2.$$

Вычтем из первого равенства второе $4 = m^2 - x^2$.

Откуда $x^2 = m^2 - 4$ или $x = |\sqrt{m^2-4}|$, так как величина $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$ (как сумма двух взаимно обратных чисел), то $m^2 - 4 > 0$ и $|\sqrt{m^2-4}| = \sqrt{m^2-4}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{m^2-4}$.

ЗАНЯТИЕ СЕМНАДЦАТОЕ
ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал

1. Некоторые свойства тригонометрических функций. В занятии шестнадцатом нами было уже отмечено одно свойство тригонометрических функций — их четность и нечетность. Напомним еще раз, что функции косинус и секанс — четные, а синус, тангенс, котангенс и косеканс — нечетные.

Важным свойством тригонометрических функций является их периодичность.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, от прибавления которого к аргументу функция не меняет своего значения, т. е. функция $y = f(x)$ называется периодической, если $f(x + T) = f(x)$.

Наименьшее абсолютное значение, величины, прибавление которой к аргументу не влечет изменение функции, называется периодом функции.

Все тригонометрические функции — периодические. При этом функции $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ имеют период 2π, а $\operatorname{tg} x$ и

ctg x имеют период π. В этом легко убедиться, если воспользоваться формулами приведения.

В самом деле, $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

2. Изменение тригонометрических функций. Рассмотрим последовательное изменение значений тригонометрических функций при всевозможных изменениях значений аргумента.

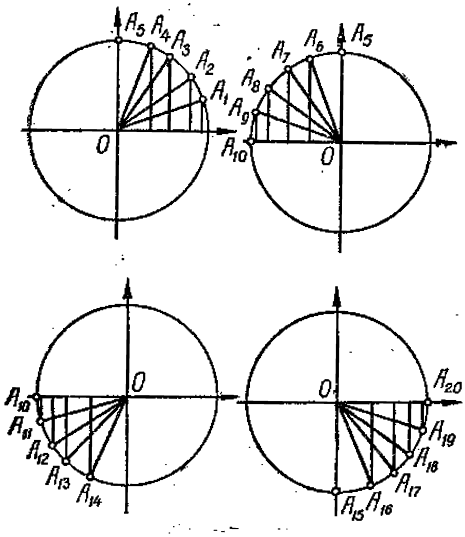


Рис. 17.1.

Вследствие периодичности тригонометрических функций достаточно ограничиться изменением аргумента в пределах от 0 до 2π для синуса и косинуса и от 0 до π для тангенса и котангенса, так как в дальнейшем значения эти будут повторяться.

Поскольку $\sin\alpha$ численно равен ординате конца подвижного радиуса единичной окружности, то при изменении аргумента α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\sin\alpha$ будет возрастать от 0 до 1. Для углов, лежащих во второй четверти, т. е. при изменении аргумента α от $\frac{\pi}{2}$ до π, $\sin\alpha$ будут уменьшаться от 1 до 0. Для углов, лежащих в третьей четверти, т. е. при изменении аргумента α от π до $\frac{3}{2}\pi$, $\sin\alpha$ продолжает уменьшаться от 0 до —1. И, наконец, в четвертой четверти синус возрастает от —1 до 0.

Характер изменения $\sin\alpha$ по четвертям при изменении α от 0 до 2π наглядно виден на рис. (17.1).

Аналогичными рассуждениями можно рассмотреть изменение и остальных тригонометрических функций $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

В табл. 4 приведены интервалы изменения тригонометрических функций по четвертям.

В таблице даны только те значения тригонометрических функций, которые они принимают в начале и конце четверти. Очевидно, что функции в каждой четверти принимают все промежуточные значения, заключенные между указанными пределами.

Таблица 4

Функции	Углы			
	$0, \ldots, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}, \ldots, \pi$	$\pi, \ldots, \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi, \ldots, 2\pi$
$\sin\alpha$	$0, \ldots, 1$	$1, \ldots, 0$	$0, \ldots, -1$	$-1, \ldots, 0$
$\cos\alpha$	$1, \ldots, 0$	$0, \ldots, -1$	$-1, \ldots, 0$	$0, \ldots, 1$
$\operatorname{tg}\alpha$	$0, \ldots, +\infty$	$-\infty, \ldots, 0$	$0, \ldots, +\infty$	$-\infty, \ldots, 0$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$+\infty, \ldots, 0$	$0, \ldots, -\infty$	$+\infty, \ldots, 0$	$0, \ldots, -\infty$

На рис. 17.2 наглядно виден характер изменения функции $\operatorname{tg}\alpha$, когда α пробегает все значения в первой и во второй четвертях.

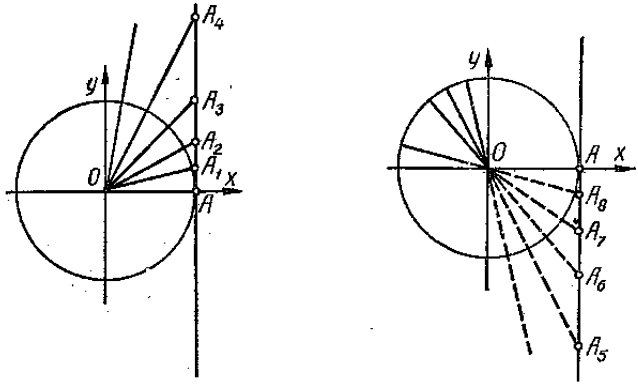


Рис. 17.2.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha$ численно равен ординате соответствующей точки на линии тангенсов, то при изменении α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg}\alpha$ все время возрастает оставаясь положительным. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ подвижный радиус будет параллелен линии тангенсов, соответствующая точка на линии тангенсов расположена в бесконечно удаленной точке, и в этом случае говорят, что $\operatorname{tg}\alpha$ не существует.

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае, когда α изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до π. Для этих значений аргумента $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от $-\infty$ до 0.

Анализируя таблицу изменения тригонометрических функций, можно сделать некоторые выводы о свойствах тригонометрических функций.

При изменении аргумента α от 0 до 2π $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ непрерывно изменяются для всех значений аргумента α из указанного промежутка, т. е. любому значению α соответствует вполне определенное

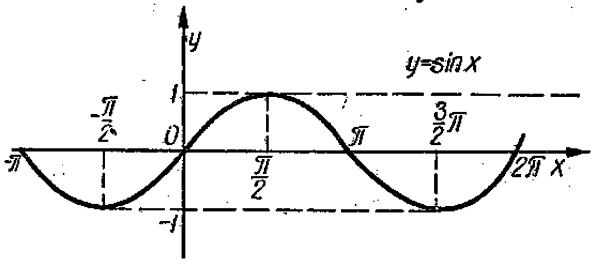


Рис. 17.3.

значение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Говорят поэтому, что функции синус и косинус непрерывны на всей числовой оси от $-\infty$ до $+\infty$. Этого нельзя сказать о функциях $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. В самом деле, при изменении, например, угла 90° на малую величину ε в ту или другую сторону получаются углы $90° - \varepsilon$ и $90° + \varepsilon$, тангенсы которых совершают скачок от бесконечно большой положительной величины до бесконечно большой отрицательной величины, не проходя через какое-то промежуточное значение.

Аналогично ведет себя и $\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha = 0°$. Говорят, что тангенс терпит разрыв в точках, кратных $\frac{\pi}{2}$, т. е. для значений аргумента равных $\frac{\pi}{2} + k\pi$, а котангенс терпит разрыв в точках кратных π, т. е. для значений аргумента равных $k\pi$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$

Синус и косинус изменяются в пределах от -1 до $+1$ и никогда не могут принимать значения по абслютному значению больше 1. Тангенс и котангенс могут принимать любые сколь угодно большие как положительные, так и отрицательные значения, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут изменяться в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$.

3. Графики тригонометрических функций. Для построения графиков тригонометрических функций поступают следующим образом. Берут определенные значения аргумента x, составляют таблицу

значений тригонометрических функций, соответствующих выбранным значениям x (для этого можно воспользоваться таблицей, представленной в п. 5 пятнадцатого занятия), и по точкам строят графики.

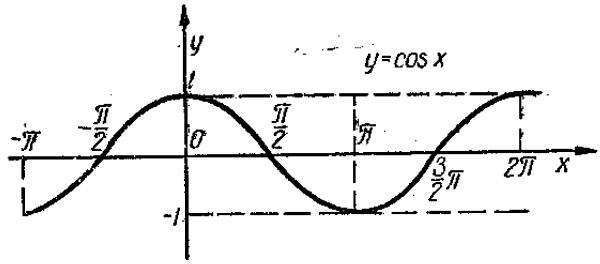


Рис. 17.4.

Графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ соответственно называются синусоидой, косинусоидой, тангенсоидой и котангенсоидой.

Общий вид их представлен на рис. (17.3)—(17.6).

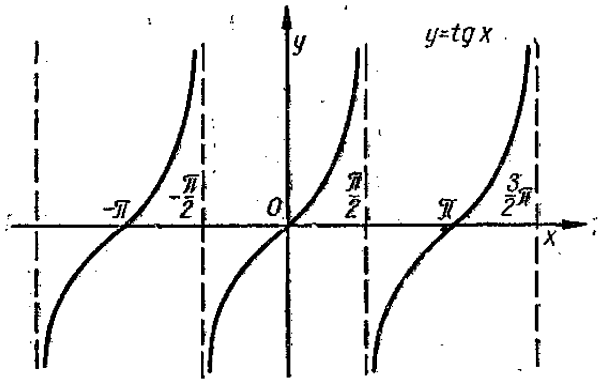


Рис. 17.5.

4. Некоторые элементарные преобразования графиков тригонометрических функций. Рассмотрим несколько наиболее типичных случаев преобразования графиков тригонометрических функций.

Рассмотрим построение графика функции $y = kT(ax + b) + c$, где под $T(x)$ будем подразумевать какую-либо из тригонометрических функций, a, b, c, k — постоянные величины.

Очевидно, график функции $y = kT(ax + b) + c$ можно получить из графика функции $y = T(x)$ путем следующих элементарных преобразований:

1) $y = kT(x)$ — сжатие или растяжение вдоль оси ординат. При таком преобразовании ординаты графика функции $y = T(x)$ увеличиваются в k раз, если $k > 1$, уменьшаются в k раз, если $0 < k < 1$. В частности, если k — отрицательное число, то помимо сжатия или растяжения, график функции симметрично отображается относительно оси абсцисс, так как все ординаты меняют знак на противоположный.

2) $y = T(ax)$ — сжатие или растяжение вдоль оси абсцисс. При таком преобразовании график функции $y = T(x)$ растягивается вдоль оси абсцисс, если $a < 1$, и сжимается, если $a > 1$. Причем сжатие или растяжение графика производится путем переноса точки с абсциссой x_1 и ординатой y_1 в точку с абсциссой ax_1 и ординатой y_1.

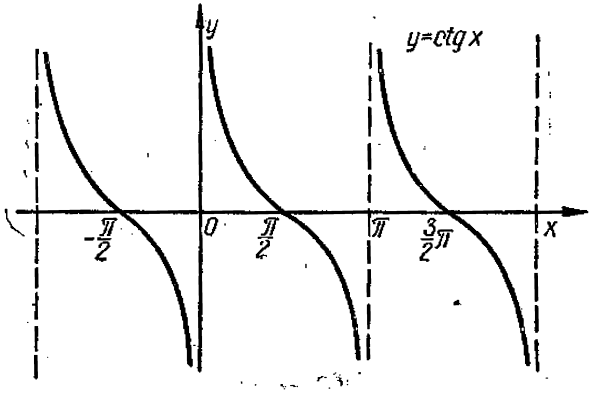


Рис. 17.6.

3) $y = T(x) + c$ — параллельный перенос вдоль оси ординат. При таком преобразовании график функции $y = T(x)$ сдвигается параллельно вдоль оси ординат на c единиц вверх, если $c > 0$, и вниз, если $c < 0$.

4) $y = T(x + b)$ — параллельный перенос вдоль оси абсцисс. Для построения графика этой функции нужно график функции $y = T(x)$ сдвинуть вдоль оси Ox вправо, если $b < 0$, и влево, если $b > 0$.

ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ

№ 17.1. Построить графики функций:

а) $y = 3 \sin x$; б) $y = \frac{1}{2} \sin x$;

в) $y = -3 \cos x$; г) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x$.

Р е ш е н и е.

а) График данной функции получается путем растяжения графика функции $y = \sin x$ в три раза вдоль оси Oy. На рис. 17.7 график функции $y = 3 \sin x$ сопоставлен с графиком функции $y = \sin x$.

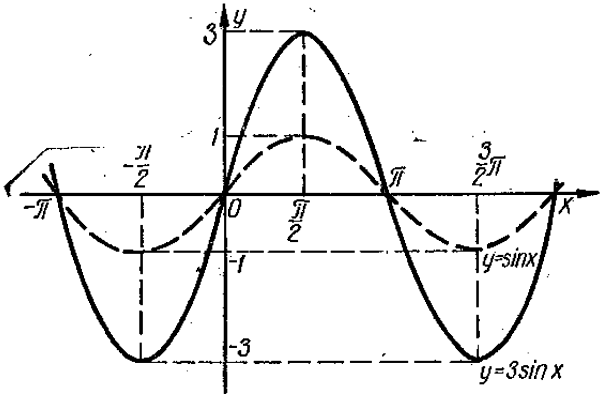


Рис. 17.7.

б) График функции представлен сплошной линией на рис. 17.8.

в) Для получения графика нужно растянуть вдоль оси Oy график функции $y = \cos x$ и затем отобразить его симметрично относительно оси Ox (см. рис. 17.9).

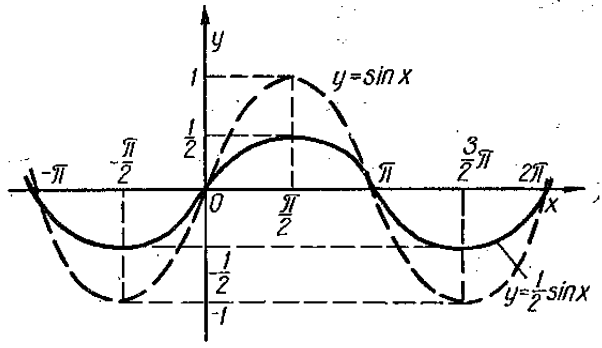


Рис. 17.8.

г) График функции $y = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x$ представлен на рис. 17.10 сплошной линией. Ордината каждой его точки получается умножением соответствующей ординаты графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ на $-\frac{1}{2}$.

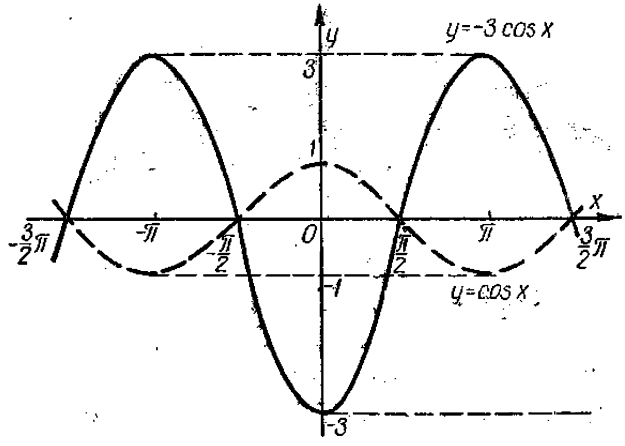


Рис. 17.9.

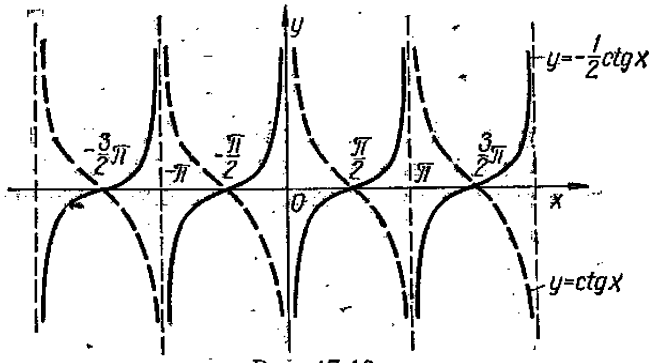


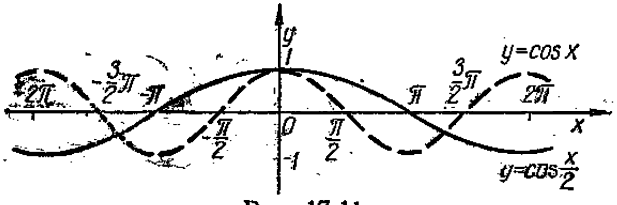
Рис. 17.10.

№ 17.2. Построить графики функции:

а) $y = \cos\frac{x}{2}$; б) $y = \sin 2x$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Решение.



а)

Рис. 17.11.

б)

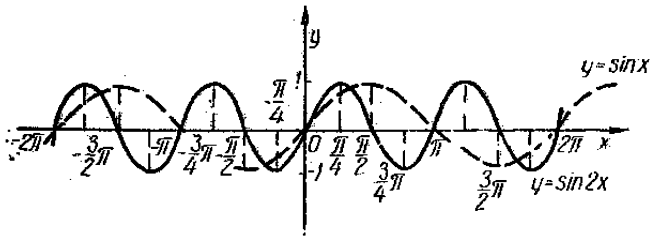


Рис. 17.12.

в) Поскольку $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то для построения графика данной функции нужно построить график функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и отобразить его симметрично, относительно оси Ox (см. рис. 17.13).

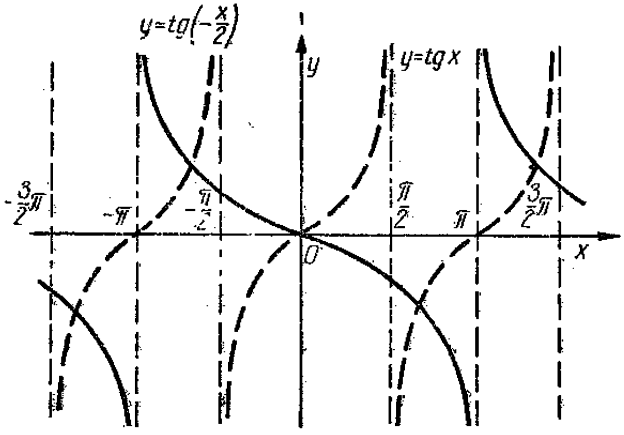


Рис. 17.13.

№ 17.3. Построить графики функций:

а) $y = 3\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$; б) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 3x\right)$;

в) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение.

а) Перепишем функцию в виде

$$y = 3\cos\left(2x + \frac{2}{6}\pi\right) = 3\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Видно, что для построения ее графика необходимо: 1) сдвинуть

график функции $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{6}$ влево вдоль оси Ox; 2) сжать его вдвое вдоль оси Ox; 3) растянуть втрое вдоль оси Oy.

Построения искомой функции представлены на рис. 17.14.

б) Если переписать функцию в виде

$$y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 3x\right) = -\frac{1}{2}\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

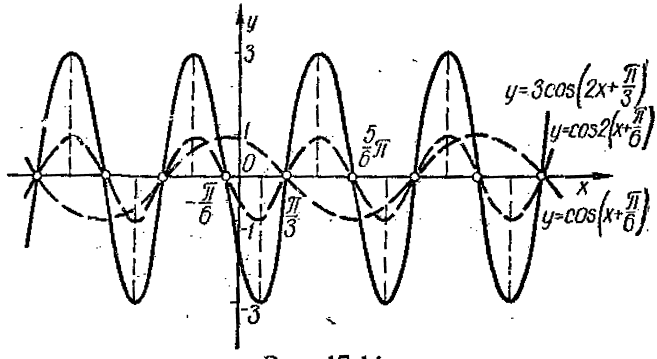


Рис. 17.14.

то аналогично предыдущему построение ее графика сведется к смещению на $\frac{\pi}{4}$ вправо вдоль оси Ox, сжатию вдоль оси Ox в три раза и вдоль оси Oy в два раза. При этом последовательность построения будет следующая: 1) сдвинем график $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{4}$ вправо (т. е. построим график $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$); 2) сожмем график $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ вдоль оси Ox втрое (получим график $y = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$); 3) сожмем график $y = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ вдоль оси oy вдвое (получим график $y = \frac{1}{2}\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$); 4) отобразим график $y = \frac{1}{2}\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ симметрично относительно оси Ox.

На рис. 17.15 представлен график данной функции. Штриховыми линиями изображены некоторые промежуточные построения $\left(y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right.$ и $\left.y = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

в) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Построим график $y = \operatorname{tg} x$, сдвинем его вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{6}$ $\left(y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$, сожмем полученный график вдвое вдоль оси $Ox\left(y = \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ и сожмем в два раза вдоль оси Oy $\left(y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$. На рис. 17.16 представлены графики функций $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ и $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (штриховой линией).

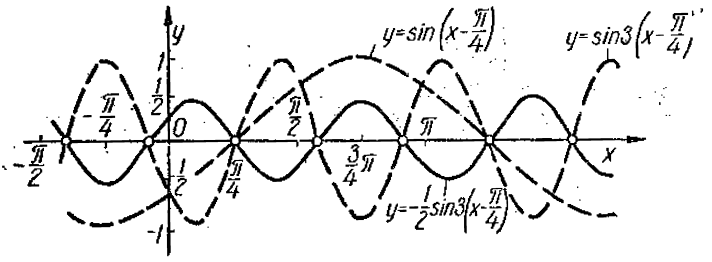


Рис. 17.15.

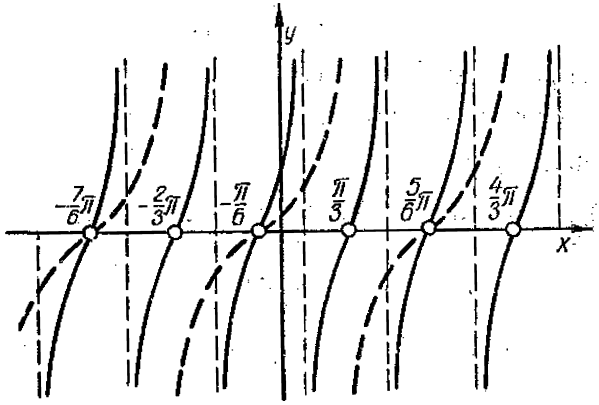


Рис. 17.16.

№ 17.4. Построить графики функций:
а) $y = \sec x$; б) $y = \operatorname{cosec} x$.
Р е ш е н и е.

а) Используя тождество $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ проследим, как изменяются значения функции $y = \sec x$, когда x изменяется в пределах всей числовой оси от $-\infty$ до ∞.

Прежде всего отметим, что в точках, кратных $\frac{\pi}{2}$, т. е., в точках $x = \pm \frac{k\pi}{2}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, функция $y = \sec x$ неопределена (не существует), поскольку в этих точках $\cos x$ принимает значения, равные нулю. Кроме того, функция $y = \sec x$ — четная, поскольку

$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Следовательно, график ее будет симметричен относительно оси ординат. Поэтому, для построения графика функции $y = \sec x$ доста-

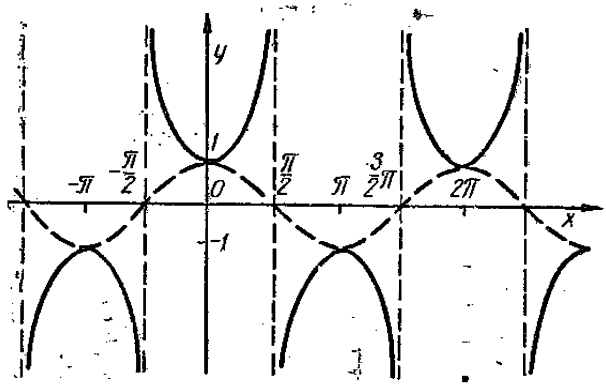


Рис. 17.17.

точно построить часть его для положительных значений и затем симметрично относительно оси Oy продолжить для отрицательных значений x.

При $x = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sec 0 = 1$. Если x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ убывает от 1 до 0, следовательно, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ будет возрастать от 1 до ∞.

При изменении x от $\frac{\pi}{2}$ до π $\cos x$ убывает от 0 до -1, $\sec x$, следовательно, будет возрастать от $-\infty$ до -1. При изменении x от π до $\frac{3}{2}\pi$ $\cos x$ возрастает от -1 до 0, а $\sec x$ будет в этом промежутке убывать от -1 до $-\infty$. Совершенно аналогично показываем, что в пределах от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π $\sec x$ будет убывать от ∞ до 1. В дальнейшем в силу периодичности функция $y = \sec x$ будет повторять свои значения, которые она принимает в промежутке от 0 до 2π.

График функции $y = \sec x$ представлен на рис. 17.17 (штриховой линией изображен график функции $y = \cos x$).

б) Для построения графика функции $y = \operatorname{cosec} x$ можно провести рассуждения, аналогичные предыдущему построению, учитывая тождество $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Однако, если учесть, что $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$

$= \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то оказывается, что график функции $y = \operatorname{cosec} x$ получается путем параллельного смещения графика $y = \sec x$ вдоль оси Ox вправо на $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 17.18).

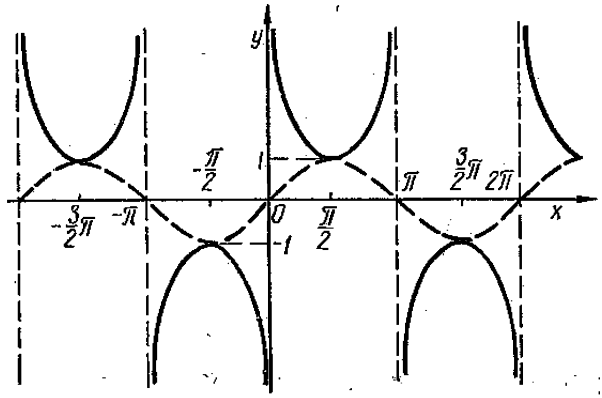


Рис. 17.18.

№ 17.5. Построить графики функций:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = 1 - |\cos x|$; в) $y = |\operatorname{tg} x|$.

Решение.

а) Чтобы построить график функции $y = |\sin x|$, нужно построить график $y = \sin x$ и те части его, которые лежат ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox отобразить в верхнюю полуплоскость (см. рис. 17.19).

б) Для построения этого графика нужно кривую $y = |\cos x|$ умножить на — 1 (т. е. перевернуть симметрично относительно оси Ox) и поднять на единицу вверх вдоль оси Oy (см. рис. 17.20).

в) Строится совершенно аналогично примеру а) (см. рис. 17.21).

№ 17.6. Построить графики функций:

а) $y = \sin|x|$;

б) $y = \operatorname{tg}|x|$.

Решение.

а) Функция $y = \sin|x|$ — четная, так как $\sin|-x| = \sin|x|$. Поэтому для построения ее графика, достаточно построить график

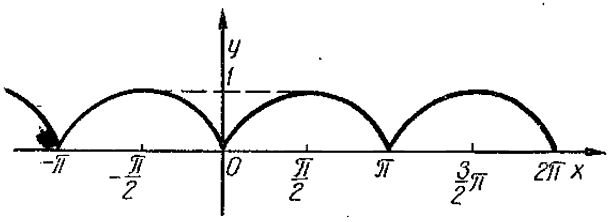


Рис. 17.19.

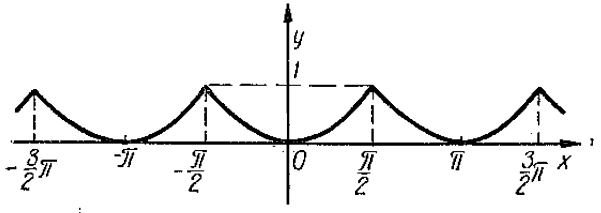


Рис. 17.20.

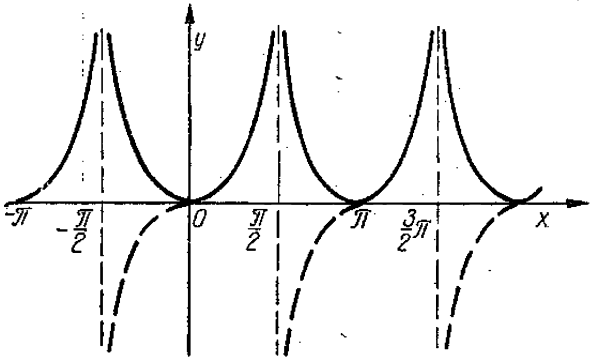


Рис. 17.21.

для положительных значений x и затем симметрично относительно оси Oy, достроить его для отрицательных значений x. Но при $x > 0$ $|x| = x$ и, следовательно, функция $y = \sin|x|$ совпадает с функцией $y = \sin x$.

На рис. 17.22 представлен график фукции $y = \sin x$ для положительных значений x.

Поэтому график функции $y = \sin|x|$ будет иметь вид, изображенный на рис. 17.23.

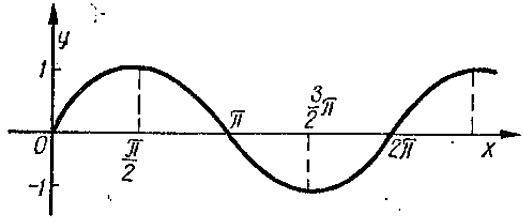


Рис. 17.22.

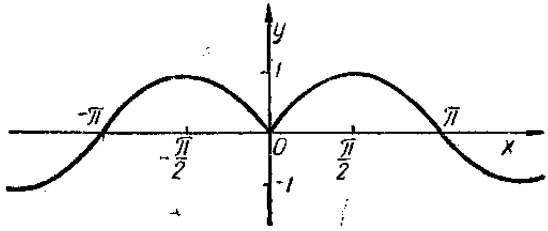


Рис. 17.23.

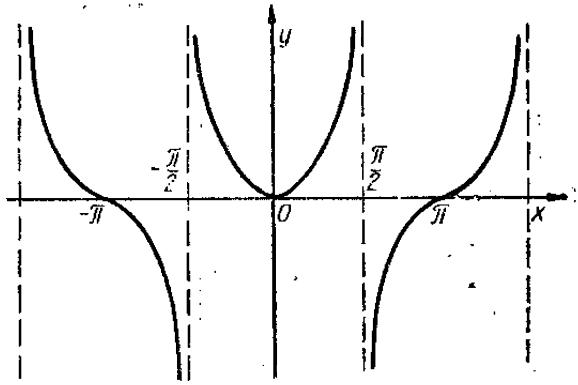


Рис. 17.24.

б) График функции $y = \operatorname{tg}|x|$ строится совершенно аналогично предыдущему (см. рис. 17.24).

№ 17.7. Построить графики функций:

а) $y = \lg \sin x$; б) $y = \lg \operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е.

а) Прежде всего, отметим, что для тех значений x, для которых $\sin x$ принимает отрицательные значения, $\lg \sin x$ не существует. Синус принимает отрицательные значения в интервалах $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$ и т. д., а также $(0, -\pi)$, $(-2\pi, -3\pi)$ и т. д.

Рассмотрим интервал $(0, \pi)$, где синус положительный. Поскольку синус принимает значения, не превышающие единицы, то $\lg \sin x$ будет принимать только отрицательные значения. При этом, если x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ возрастает от 0 до 1. Следовательно, $\lg \sin x$ будет возрастать от $-\infty$ до 0.

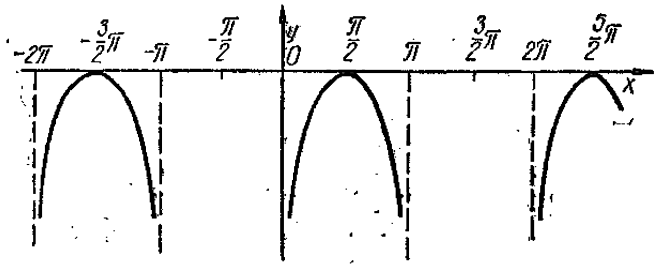


Рис. 17.25.

При изменении x от $\frac{\pi}{2}$ до π, $\sin x$ убывает от 1 до 0, $\lg \sin x$ будет убывать от 0 до $-\infty$. Аналогично ведет себя функция $y = \lg \sin x$ и в остальных интервалах области определения (см. рис. 17.25).

б) При построении этого графика применяем рассуждения, аналогичные предыдущим.

В интервалах $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ и т. д., а также $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi, -\frac{3}{2}\pi\right)$ и т. д. тангенс принимает отрицательные значения, а поэтому $\lg \operatorname{tg} x$ не существует.

Рассмотрим интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, где тангенс принимает положительные значения.

Если аргумент x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} x$ возрастает от 0 до 1, следовательно, $\lg \operatorname{tg} x$ будет возрастать от $-\infty$ до 0, когда же аргумент изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ возрастает от 1 до ∞, а $\lg \operatorname{tg} x$ будет возрастать от 0 до ∞.

В силу периодичности функции $y = \operatorname{tg} x$ функция $y = \lg \operatorname{tg} x$ будет аналогично изменяться и в остальных интервалах области определения (см. рис. 17.26).

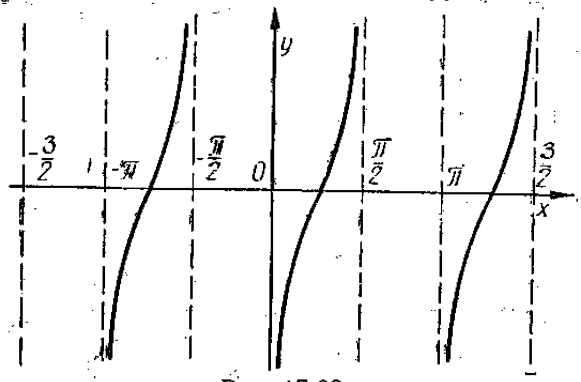


Рис. 17.26.

№ 17.8. Построить графики функций:

а) $y = a\cos x + b\sin x$; б) $y = x + \sin x$.

Р е ш е н и е.

а) Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right).$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то величины $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ являются синусом и косинусом некоторого угла φ. Тогда

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi).$$

Поэтому графиком данной функции есть синусоида, растянутая в $\sqrt{a^2 + b^2}$ раз вдоль оси Oy и смещенная вдоль оси Ox на φ вправо или влево в зависимости от знака φ (см. рис. 17.27).

б) График функции $y = x + \sin x$ можно получить как сумму графиков функций $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$. На рис. 17.28 представлены графики этих функций.

Нетрудно заметить, что в точках, кратных π (т. е. при $x = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ и т. д.), функция $y = x + \sin x$ принимает значения,

равные x, так как $\sin x = 0$ в этих точках. В тех точках, где $\sin x = 1$ функция $y = x + \sin x$ принимает значения $y = x + 1$, а в точках, где $\sin x = -1$, $y = x - 1$. В промежутках между ними, очевидно, функция либо возрастает от $x - 1$ до $x + 1$, либо

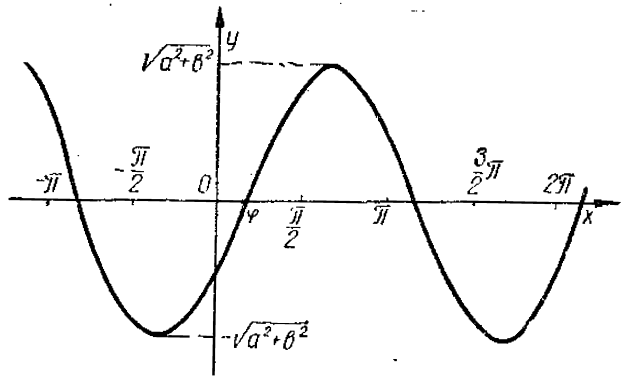


Рис. 17.27.

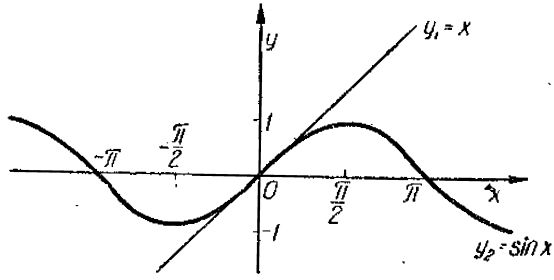


Рис. 17.28.

убывает от $x + 1$ до $x - 1$. Например, в промежутке $(0, 2\pi)$ функция $y = x + \sin x$ сначала возрастает от 0 до $x + 1$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, затем убывает от $x + 1$ до $(x - 1)$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, затем снова возрастает от $x - 1$ до 0 $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

График функции $y = x + \sin x$ представлен на рис. 17.29.

№ 33.9. Построить график функции $y = x \sin x$.

Р е ш е н и е. Умножая графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ (см. рис. 17.28), получим следующее.

В точках, кратных π, $y = x \sin x$ принимает значения равные нулю, т. е. в этих точках график функции пересекает ось Ox. В точ-

ках, в которых $\sin x = 1$, функция $y = x \sin x$ принимает значения равные x, а в точках, где $\sin x = -1$ — значения равные $-x$, т. е. в указанных точках график функции $y = x \sin x$ касается соот-

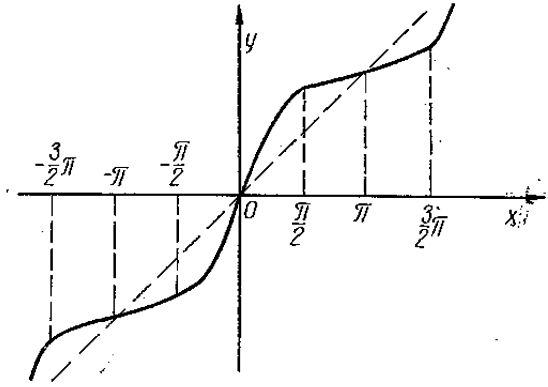


Рис. 17.29.

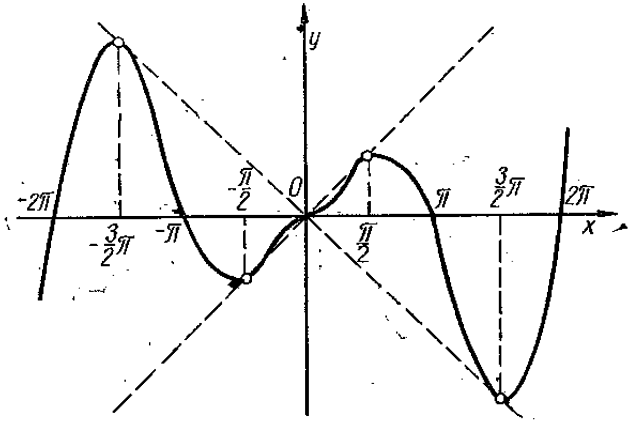


Рис. 17.30.

ветственно прямых $y = x$ и $y = -x$. В промежутке между этими точками функция $y = x \sin x$ либо возрастает от $-x$ до x, либо убывает от x до $-x$.

График функции представлен на рис. 17.30.

ЗАНЯТИЕ ВОСЕМНАДЦАТОЕ

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Теоретический материал

1. Общие замечания. Тригонометрическим уравнением называется такое уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком тригонометрической функции.

Примерами тригонометрических уравнений могут быть следующие:

$$\sin x - 2\cos 2x = 1, \quad 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}(2x - 1) + 3 = 0,$$

$$2^{\sin x} - 1 = 0 \text{ и множество других.}$$

Уравнение $(x - 1)\operatorname{tg}\alpha + \cos 3\alpha = 0$ не является тригонометрическим, поскольку неизвестное не входит под знак тригонометрической функции, подобно тому как уравнение $x\sqrt{2} - \sqrt{6} = 0$ не является иррациональным уравнением. Неизвестной величиной в тригонометрическом уравнении является угол или дуга.

Решить тригонометрическое уравнение — значит найти общую формулу, содержащую все углы, при подстановке которых левая и правая части уравнения равны между собой. Поскольку каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение, если не сделано каких-либо дополнительных оговорок, имеет бесчисленное множество решений.

Самый общий метод при решении тригонометрических уравнений состоит в том, что различные тригонометрические функции, входящие в уравнение, выражают через какую-нибудь одну из них и, принимая функцию за неизвестное, решают полученное алгебраическое уравнение, в результате чего приходят к одному из так называемых простейших тригонометрических уравнений.

2. Простейшие тригонометрические уравнения. Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = a; \tag{18.1}$$

$$\cos x = b; \tag{18.2}$$

$$\operatorname{tg} x = c; \tag{18.3}$$

$$\operatorname{ctg} x = d; \tag{18.4}$$

где a, b, c, d — данные числа.

Как было отмечено выше, к решению простейших тригонометрических уравнений приводится решение любого тригонометрического уравнения, каким бы сложным оно ни было. Поэтому необходимо научиться быстро и безошибочно решать эти простейшие уравнения *.

Важно уяснить себе, что уравнения (18.1) и (18.2) имеют решения только в том случае, если a и b по абсолютному значению не превышают единицы, т. е. если $|a| \leqslant 1$ и $|b| \leqslant 1$. Уравнения (18.3) и (18.4) имеют решения при любых действительных значениях c и d. Это следует из свойств тригонометрических функций, указанных в п. 2 занятия семнадцатого.

Примем следующие обозначения:

$\arcsin a$ — угол (или дуга), содержащийся в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a;

$\arccos b$ — угол (или дуга), содержащийся в промежутке от 0 до π, косинус которого равен b;

$\operatorname{arctg} c$ — угол (или дуга), содержащийся в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен c;

$\operatorname{arcctg} d$ — угол (или дуга), содержащийся в промежутке от 0 до π, котангенс которого равен d.

В дальнейшем эти значения будем называть главными значениями тригонометрических функций. Очевидно, через главные значения можно выразить все остальные значения тригонометрических функций.

Перейдем теперь к решению простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение $\sin x = a$ ($|a| \leqslant 1$) имеет два значения $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$, удовлетворяющих этому уравнению. Эти значения аргумента на единичной окружности симметрично расположены относительно вертикального диаметра (рис. 18.1).

Поэтому решением уравнения будет множество значений аргумента x, удовлетворяющих равенствам

$$x = x_1 + 2k\pi = \arcsin a + 2k\pi$$

и $$x = x_2 + 2k\pi = \pi - \arcsin a + 2k\pi = -\arcsin a + (2k+1)\pi.$$

Объединяя эти значения в одной формуле, получим

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi. \qquad (18.5)$$

* Можно было бы еще указать уравнения $\sec x = l$, $\operatorname{cosec} x = m$, но они легко сводятся к первым двум.

Если a — отрицательно, то решение запишется в виде

$$x = -(-1)^k \arcsin a + k\pi.$$

В частности, если

$$a = 0, \quad \text{то } x = k\pi; \tag{18.6}$$

$$a = 1, \quad \text{то } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \tag{18.7}$$

$$a = -1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \tag{18.8}$$

Уравнение $\cos x = b$ ($|b| \leqslant 1$) имеет два значения $x_1 = \arccos b$ и $x_2 = -\arccos b$, удовлетворяющие ему. Эти значения

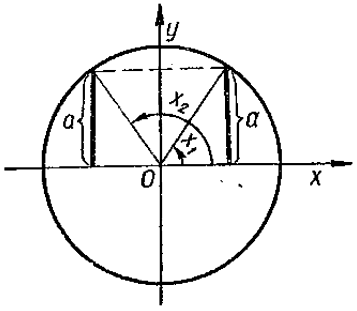


Рис. 18.1.

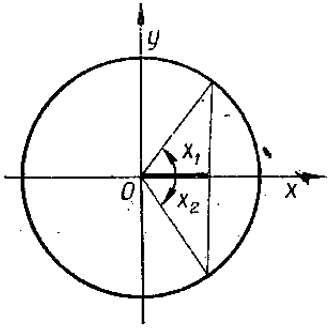


Рис. 18.2.

на единичной окружности симметрично расположены относительно горизонтального диаметра (рис. 18.2). Поэтому общее решение имеет вид

$$x = \pm \arccos b + 2k\pi. \tag{18.9}$$

Если $b < 0$, то решение имеет вид

$$x = \pm (\pi - \arccos b) + 2k\pi. \tag{18.10}$$

В частности, если

$$b = 1, \quad \text{то } x = 2k\pi; \tag{18.11}$$

$$b = 0, \quad \text{то } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}; \tag{18.12}$$

$$b = -1, \text{ то } x = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi. \tag{18.13}$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = c$ имеет главное значение

$$x_1 = \operatorname{arctg} c,$$

поэтому общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} c + k\pi. \tag{18.14}$$

Аналогично записывается и решение уравнения $\operatorname{ctg} x = d$

$$x = \operatorname{arcctg} d + k\pi. \tag{18.15}$$

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся также уравнения вида

$$\sin(a_1 x + \beta_1) = m_1; \tag{18.16}$$

$$\cos(a_2 x + \beta_2) = m_2; \tag{18.17}$$

$$\operatorname{tg}(a_3 x + \beta_3) = m_3; \tag{18.18}$$

$$\operatorname{ctg}(a_4 x + \beta_4) = m_4. \tag{18.19}$$

Для решения этих уравнений необходимо сначала определить аргумент $ax + \beta$ и затем из полученного равенства найти x. Например, для решения уравнения (18.16) найдем сначала аргумент $a_1 x + \beta_1$ на основании равенства (18.5)

$$a_1 x + \beta_1 = (-1)^n \arcsin m_1 + k\pi,$$

откуда

$$x = \frac{(-1)^n \arcsin m_1 + k\pi - \beta_1}{a_1}.$$

Аналогично решаются и остальные уравнения.

3. Классификация тригонометрических уравнений и их решение. Для тригонометрических уравнений не существует общего метода, следуя которому можно было бы решить любое уравнение. Поэтому возникает необходимость в классификации тригонометрических уравнений, т. е. разбиение множества тригонометрических уравнений на классы, для каждого из которых существует свой общий метод решения.

Рассмотрим вначале случай, когда все тригонометрические функции, входящие в тригонометрическое уравнение, зависят от одного и того же аргумента.

Простейшим уравнением такого типа является уравнение, в котором неизвестное находится под знаком только одной тригонометрической функции. В этом случае принимают данную функцию за неизвестное, и решая полученное алгебраическое уравнение, приходят к простейшим тригонометрическим уравнениям.

Например, уравнение $\sin^3 x - 5\sin^2 x + 4\sin x = 0$ является кубическим уравнением относительно функции $\sin x$, а уравнение $\operatorname{tg}^x = 2$ является показательным относительно $\operatorname{tg} x$. Поэтому,

обозначив в первом уравнении $\sin x = y$, во втором уравнении $\operatorname{tg} x = z$, приходим к алгебраическим уравнениям $y^3 - 5y^2 + 4y = 0$ и $2^{z^2} = 2$. Решая эти уравнения, приходим к простейшим тригонометрическим уравнениям $\sin x = 0$, $\sin x = 1$ и $\sin x = 4$ для первого уравнения и $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -1$ для второго уравнения.

При решении уравнений, содержащих неизвестное под знаком нескольких тригонометрических функций, самый общий метод состоит в применении так называемой универсальной тригонометрической подстановки, т. е. в применении формул (16.30) — (16.33), выражающих функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Универсальной эта подстановка называется потому, что любое уравнение, содержащее тригонометрические функции аргумента x, с помощью указанных формул сводится к уравнению, содержащему только $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Например, если в уравнении $4 \sin x + 3 \cos x = 5$ заменить $\sin x$ и $\cos x$ соответственно по формулам (16.30) и (16.31), придем к уравнению

$$\frac{8 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{3 - 3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5$$

или

$$4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0 \quad \left(\text{так как } 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0\right),$$

которое является квадратным относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Универсальная тригонометрическая подстановка хотя и дает возможность привести тригонометрическое уравнение к виду, содержащему только $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, однако часто приводит к уравнению высокой степени относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, и поэтому не всегда является удобной.

Рассмотрим несколько приемов, которые приводят тригонометрическое уравнение к решению проще, чем универсальная тригонометрическая подстановка.

Тригонометрическое уравнение называется однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$, если все члены его имеют одну и ту же степень относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Например, однородное уравнение первой степени имеет вид

$$a \sin x + b \cos x = 0, \tag{18.20}$$

второй степени —

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0, \tag{18.21}$$

третьей степени —

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0 \tag{18.22}$$

и т. д.

Однородные уравнения путем деления обеих его частей на $\cos x$ или $\sin x$, взятых в степени, равной степени уравнения, приводится к уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$. Например, если обе части последнего из приведенных уравнений разделить на $\cos^3 x$ получим уравнение

$$a \operatorname{tg}^3 x + b \operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg} x + d = 0,$$

кубическое относительно $\operatorname{tg} x$.

К однородным уравнениям второго порядка сводится также уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d. \tag{18.23}$$

В самом деле, если правую часть его представить как $d(\sin^2 x + \cos^2 x)$, то уравнение примет вид

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

или

$$(a - d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c - d) \cos^2 x = 0,$$

которое является однородным.

Этим же приемом можно решить и уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c. \tag{18.24}$$

Для этого обе части его возводим в квадрат

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2,$$

и применяя вышеизложенный прием, придем к однородному уравнению

$$(a^2 - c^2) \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + (b^2 - c^2) \cos^2 x = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\sin^n x + \cos^n x = 1, \tag{18.25}$$

где n — натуральное число.

Если $n = 1$, уравнение принимает вид

$$\sin x + \cos x = 1,$$

решение которого рассмотрено выше.

При $n = 2$ получаем тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Рассмотрим случай, когда $n \geqslant 3$.

Можно показать, что если $|\sin x| \neq 1$ и $|\cos x| \neq 1$, то $\sin^n x + \cos^n x < 1$. В самом деле, $\sin^n x < \sin^2 x$ (так как $|\sin x| < 1$) и $\cos^n x < \cos^2 x$ (так как $|\cos x| < 1$). Складывая эти два неравенства, получим требуемое.

Учитывая полученное неравенство, можем утверждать, что уравнение (18.25) имеет решение в том случае, когда $|\sin x| = 1$, либо $|\cos x| = 1$.

Поэтому уравнение (18.25) распадается на следующие простейшие тригонометрические уравнения: при n — нечетном $\sin x = 1$ или $\cos x = 1$; при n — четном $\sin x = \pm 1$ или $\cos x = \pm 1$.

Часто при решении тригонометрических уравнений пользуются следующим приемом. Переносят все члены уравнения в левую часть, раскладывают последнюю на множители и, приравнивая каждый из сомножителей к нулю, находят их корни. Из совокупности полученных корней выбирают те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

Этим приемом особенно часто пользуются для решения уравнений, содержащих различные тригонометрические функции от различных аргументов.

Если этого не удается сделать, то уравнения, содержащие тригонометрические функции различных аргументов, стараются свести к уравнению, содержащему различные тригонометрические функции одного и того же аргумента, которое затем решается одним из указанных выше способов.

Рассмотрим несколько частных приемов решения тригонометрических уравнений, содержащих функции разных аргументов.

Уравнения

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \sin \gamma x \sin \delta x;$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \sin \gamma x \cos \delta x; \tag{18.26}$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \cos \gamma x \cos \delta x; \tag{18.27}$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \cos \gamma x \cos \delta x \tag{18.28}$$

решаются с помощью приема, основанного на замене произведений тригонометрических функций их полусуммами или полуразностями. Причем этот прием приводит к цели лишь в том случае, если между числами α, β, γ и δ выполняется одно из соотношений

$$\alpha \pm \beta = \gamma \pm \delta. \tag{18.29}$$

Уравнения

$$\sin \alpha x = \sin \beta x,$$
$$\sin \alpha x = \cos \beta x,$$
$$\cos \alpha x = \cos \beta x,$$
$$\operatorname{tg} \alpha x = \operatorname{tg} \beta x,$$
$$\operatorname{tg} \alpha x = \operatorname{ctg} \beta x \qquad (18.30)$$

решаются следующим способом. Слагаемое, стоящее в правой части уравнения, переносится влево и по формулам (16.23) — (16.28) левая часть преобразуется в произведение. В результате приходим к уравнению, левая часть которого представляет произведение двух сомножителей, а правая часть есть нуль.

В заключение параграфа необходимо отметить, что при решении уравнения над обеими частями его приходится производить действия, которые могут привести к потере корней или приобретению посторонних корней. Поэтому, если в процессе решения уравнения применялись действия которые могут приводить к неравносильным уравнениям, то необходимо: 1) подстановкой проверить пригодность полученных корней; 2) в процессе решения проводить исследования, чтобы избежать потерю корней.

4. **Графическое решение тригонометрических уравнений.** Графический метод решения уравнений, которым мы пользовались для решения алгебраических уравнений, применим и для решения тригонометрических уравнений. Более того, существуют уравнения, которые не имеют аналитического решения и поэтому графический метод для их решения является единственно возможным. К таким уравнениям относятся, например уравнения $\operatorname{tg} x = x$, $2^{1-x} = \cos x$ и множество других.

Как известно, графический метод решения заключается в отыскании точек пересечения графиков функций входящих в уравнение. Например, чтобы решить графически уравнение $\operatorname{tg} x = x$ нужно построить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ и в качестве решения уравнения взять абсциссы точек их пересечения.

5. **Системы тригонометрических уравнений и их решение.** Ни какой классификации систем тригонометрических уравнений и, тем более, методов их решений не может быть и речи, поскольку как сами системы, так и методы их решения весьма разнообразны. Решение же в общем случае представляет значительные трудности. Поэтому ограничимся рассмотрением некоторых простейших случаев,

Одним из таких простейших случаев является случай такой системы, когда в одном уравнении дана зависимость между углами, а в другом — зависимость между любыми их тригонометрическими функциями (сумма, разность, частное или произведение).

Рассмотрим, например, систему

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть первого уравнения в произведение $2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a$. Но со второго уравнения $x + y = b$.

Поэтому система принимает вид

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \\ x + y = b, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}}, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$x - y = \pm 2 \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + 2k\pi.$$

Таким образом, для нахождения x и y получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x - y = \pm 2 \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + 2k\pi, \\ x + y = b, \end{cases}$$

решение которой не представляет труда.

Аналогично решаются и системы

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a, \\ x \pm y = b, \end{cases} \tag{18.31}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a, \\ x \pm y = b, \end{cases} \tag{18.32}$$

а также системы

$$\begin{cases} \cos x \pm \sin y = a \\ x \pm y = b \end{cases}, \tag{18.33}$$

в которых $\cos x$ или $\sin y$ нужно заменить по формулам приведения. Например, система

$$\begin{cases} \cos x - \sin y = a, \\ x - y = b \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ x + y = b. \end{cases} \tag{18.34}$$

По формуле (16.21) преобразуем левую часть первого уравнения

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)].$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 2a + \cos b \\ x + y = b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = \arccos(2a + \cos b) + 2k\pi \\ x + y = b \end{cases}$$

Аналогично решаются и системы

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \tag{18.35}$$

$$\begin{cases} \cos x \sin y = a, \\ x \pm y = b. \end{cases} \tag{18.36}$$

Более сложными являются системы, двух уравнений с двумя неизвестными, оба уравнения которых представляют собой зависимость между тригонометрическими функциями.

Рассмотрим несколько примеров таких систем.

Пример 1.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$$

Преобразуем левые части обеих уравнений в произведения

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \\ 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b \end{cases}$$

и разделим первое уравнение на второе

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b},$$

откуда находим

$$x+y=2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+2k\pi.$$

Подставив теперь найденное значение $x+y$ в одно из преобразованных уравнений системы, найдем $x-y$, после чего система сводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пример 2.

$$\begin{cases}\sin x\cos y=a,\\ \cos x\sin y=b.\end{cases}$$

Сложим и вычтем почленно данные уравнения

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=a+b,\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=a-b\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin(x+y)=a+b,\\ \sin(x-y)=a-b,\end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases}x+y=(-1)^k\arcsin(a+b)+k\pi\\ x-y=(-1)^k\arcsin(a-b)+k\pi.\end{cases}$$ и т. д.

Пример 3.

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a,\\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=b.\end{cases}$$

Преобразуем левую часть второго уравнения

$$\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\frac{1}{\operatorname{tg}y}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=b,$$

откуда находим

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{b}=\frac{a}{b}.$$

Решая теперь совместно уравнения

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{a}{b},\end{cases}$$

находим $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$. После чего нетрудно найти x и y.

Пример 4.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \\ \operatorname{tg}(x+y) = b; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = b;$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{b-a}{b} \text{ и т. д.}$$

ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ

№ 18.1. Решить уравнения:

а) $\sin x = 0{,}5$; б) $\cos x = -0{,}5$;

в) $\operatorname{tg} x = 1$.

Решение. Это примеры простейших тригонометрических уравнений. Непосредственно по формулам (18.5), (18.10) и (18.14) находим.

а) $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi$, но $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Поэтому

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

б) $x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{1}{2}\right) + 2k\pi$, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Поэтому

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

в) $x = \operatorname{arctg} 1 + k\pi$, но $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

№ 18.2. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $\cos 2x = 1$; в) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$;

г) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$; д) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Решение. При решении этих тригонометрических уравнений нужно решить его сначала относительно всего аргумента, а затем уже определить x.

а) $x - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} 1 + k\pi$; $x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi = \frac{3+4k}{4}\pi$.

б) Согласно формулы (18.11) $2x = 2k\pi$, откуда $x = k\pi$.

в) $2x + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, $2x + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $2x = -\frac{3}{4}\pi + k\pi$, $x = -\frac{3}{8}\pi + \frac{k\pi}{2} = \frac{4k-3}{8}\pi$.

г) $3x + \frac{\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Откуда

$$3x = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3k+1}{3}\pi;$$

$$x = \frac{3k+1}{9}\pi.$$

д) $5x + \frac{\pi}{6} = k\pi$;

$$5x = k\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6k-1}{6}\pi; \quad x = \frac{6k-1}{30}\pi.$$

№ 18.3. Решить уравнения:

а) $5\sin^2 x = 2\sin x$;

б) $5\operatorname{tg}^2 x - 12\operatorname{tg} x = 0$;

в) $6\cos^2 x = 1 + \cos x$;

г) $2\sin^2 x = 3\cos x$.

Р е ш е н и е.

а) Вынесем за скобки $\sin x$ и, приравнивая к нулю каждый из сомножителей, получим два простейших уравнения.

$$\sin x(5\sin x - 2) = 0,$$

$$\sin x = 0, \quad x = k\pi,$$

$$5\sin x - 2 = 0, \quad \sin x = \frac{2}{5}, \quad x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + k\pi.$$

Итак, решением данного уравнения будет

$$x = k\pi \text{ и } x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + k\pi.$$

б) Аналогично предыдущему

$$\operatorname{tg} x(5\operatorname{tg} x - 12) = 0, \quad \operatorname{tg} x = 0, \quad x = k\pi,$$

$$5\operatorname{tg} x - 12 = 0, \quad \operatorname{tg} x = \frac{12}{5}, \quad x = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} + k\pi.$$

Ответ. $x = k\pi, \quad x = \operatorname{arctg}\frac{12}{5} + k\pi.$

в) $6\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$

Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Обозначим $\cos x = y$. Получим

$$6y^2 - y - 1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -\frac{1}{3}.$$

Для нахождения x получаем два простейших уравнения

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\cos x = -\frac{1}{3}, \quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2k\pi.$$

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2k\pi.$

г) Заменив в этом уравнении $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, придем к квадратному уравнению относительно $\cos x$.

$$2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x, \quad 2 - 2\cos^2 x = 3\cos x,$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0, \quad \cos y = y,$$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -2.$$

Для нахождения x получаем два простейших уравнения

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -2.$$

Первое уравнение имеет решение $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Второе уравнение решений не имеет, так как косинус не может принимать значения по абсолютному значению больше единицы.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

№ 18.4. Решить уравнения:

а) $\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x} = 2;$

1;

б) $\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} - \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1$

в) $\sqrt{2} \cdot 2^{\cos x} = 1$.

Р е ш е н и е. а) Обозначим y. Получим уравнение $y + \frac{1}{y} = 2$ или $y = 0$, $(y - 1)^2 = 0$. Откуда $y_1 = y_2 = 1$.

Возвращаясь последовательно, для нахождения x получаем уравнение $\cos 2x = 1$, откуда находим

$$2x = 2k\pi \text{ или } x = k\pi.$$

б) Обозначим $\operatorname{tg} x = y$. Получим иррациональное уравнение

$$\sqrt{y + 1} - \sqrt{y - 1} = 1.$$

Возводим обе части его в квадрат

$$y + 1 - 2\sqrt{y^2 - 1} + y - 1 = 1 \quad \text{или} \quad 2y - 1 = 2\sqrt{y^2 - 1}.$$

Возводя еще раз в квадрат, получим

$$4y^2 - 4y + 1 = 4y^2 - 4 \quad \text{или} \quad 4y = 5.$$

Итак, для нахождения x получаем уравнение $4 \operatorname{tg} x = 5$ или $\operatorname{tg} x = \frac{5}{4}$, откуда находим

$$x = \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{4} + k\pi.$$

в) Обозначим $\cos x = y$, $\sqrt{2} \cdot 2^y = 1$, $2^y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, или $2^y = 2^{-\frac{1}{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$. Но $y = \cos x$, поэтому $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

№ 18.5. Решить уравнения:

а) $\sin x - \cos x = 1$;

б) $\cos^2 x + \cos x \sin x = 1 - \sin x$.

Р е ш е н и е. Применим для решения этих уравнений универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$. Тогда

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.$$

а) Уравнение примет вид

$$\frac{2y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} = 1.$$

Откуда $y = 1$ и для нахождения x получаем уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, откуда $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, или $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Следует отметить, что при решении уравнений с помощью универсальной тригонометрической подставки возможны потери корней вида $x = \pi(2k+1)$ так, как при этих значениях $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла. Поэтому при решении этим методом нужно проверить нет ли среди значений $x = \pi(2k+1)$ корней данного уравнения.

Подстановкой убеждаемся, что указанные значения удовлетворяют данному уравнению.

В самом деле,

$$\sin\pi(2k+1) - \cos\pi(2k+1) = \sin(2k\pi+\pi) - \cos(2k\pi+\pi) =$$
$$= \sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1.$$

Итак, $x = \pi(2k+1)$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

б) Выражая функции, входящие в уравнение, через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и обозначая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, получим

$$\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1 - \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

или после преобразований $y^2 - y = 0$. Откуда находим $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Итак, для нахождения x получаем уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, которые дают $\frac{x}{2} = k\pi$ и $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, или $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что значения $x = \pi(2k+1)$ также являются корнями данного уравнения.

Ответ. $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pi(2k+1)$.

№ 18.6. Решить уравнения:

а) $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$;

б) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$.

Р е ш е н и е.

а) Это уравнение является кубическим относительно $\sin x$. Обозначая $\sin x = y$, получим уравнение $4y^3 + 4y^2 - 3y - 3 = 0$.

Преобразуем левую часть его так:

$$(4y^3 + 4y^2) - (3y + 3) = 4y^2(y+1) - 3(y+1) = (y+1)(4y^2 - 3).$$

Таким образом, уравнение запишется в виде

$$(y+1)(4y^2 - 3) = 0.$$

Для нахождения его корней приравняем к нулю каждый из сомножителей

$$y + 1 = 0, \quad y_1 = -1,$$

$$4y^2 - 3 = 0, \quad y^2 = \frac{3}{4}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, для нахождения x получаем простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = -1, \quad x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Последние два решения можно объединить одной формулой

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ответ. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

б) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$.

Приведем уравнение к виду, содержащему только одну функцию. Для этого $\sin^2 x$ выразим через $\cos^2 x$.

$$2\cos^2 x + 4\cos x = 3(1 - \cos^2 x)$$

или

$$5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$$

Это уравнение квадратное относительно $\cos x$.

Обозначим $\cos x = y$ и решим полученное квадратное уравнение

$$5y^2 + 4y - 3 = 0, \quad y_1 = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}, \quad y_2 = \frac{-2-\sqrt{19}}{5}.$$

Для нахождения x получаем уравнения

$$\sin x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{-2-\sqrt{19}}{5}.$$

Первое уравнение имеет решение $x_1 = (-1)^k \arcsin \frac{-2+\sqrt{19}}{5} + k\pi$.

Второе уравнение решений не имеет, поскольку

$$\left|\frac{-2-\sqrt{19}}{5}\right| > 1.$$

Ответ. $x = (-1)^k \arcsin \frac{-2+\sqrt{19}}{5} + k\pi$.

№ 18.7. Решить уравнения:

а) $3\sec^2 x = 8\operatorname{tg} x - 2;$

б) $6\operatorname{tg} x - 5\sqrt{3}\sec x + 12\operatorname{ctg} x = 0.$

Решение.

а) Приводим уравнение к виду, содержащему только одну тригонометрическую функцию. Лучше всего это сделать, если $\sec^2 x$ выразить через $\operatorname{tg}^2 x$.

$$3(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 8\operatorname{tg} x - 2$$

или

$$3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 5 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{5}{3}$$

и

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} + k\pi.$$

б) Выразим все функции, входящие в уравнение через $\sin x$ и $\cos x$

$$6\frac{\sin x}{\cos x} - 5\sqrt{3}\frac{1}{\cos x} + 12\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

Приводим к общему знаменателю

$$6\sin^2 x - 5\sqrt{3}\sin x + 12\cos^2 x = 0.$$

Выражаем $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$

$$6\sin^2 x - 5\sqrt{3}\sin x + 12(1 - \sin^2 x) = 0$$

или

$$6\sin^2 x + 5\sqrt{3}\sin x - 12 = 0,$$

откуда находим $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Первое уравнение имеет решение

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Второе уравнение решений не имеет.

№ 18.8. Решить уравнения:

а) $9\sin x - 4\cos x = 0$;

б) $5\sin^2 x - 3\sin x\cos - 4\cos^2 x = 0$;

в) $\sin^4 2x + 3\cos^4 2x - 4\sin^2 2x\cos^2 2x = 0$;

г) $\sin^5 3x + \sin^3 3x\cos^2 3x + 8\sin^2 3x\cos^3 3x + 8\cos^5 3x = 0$.

Р е ш е н и е. Это примеры однородных уравнений. Все они сводятся к целому уравнению относительно тангенса.

а) Разделим обе части равенства на $\cos x$: $9\frac{\sin x}{\cos x} - 4 = 0$ или $\operatorname{tg} x = \frac{4}{9}$. Откуда находим

$$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{9} + k\pi.$$

б) Разделим обе части равенства на $\cos^2 x$,

$$5\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\frac{\sin x}{\cos x} - 4 = 0$$

или

$$5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\operatorname{tg} x = -1 \text{ и } \operatorname{tg} x = 4.$$

Откуда

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = \operatorname{arc\,tg} 4 + k\pi.$$

в) Разделим обе части равенства на $\cos^4 2x$.

$$\operatorname{tg}^4 2x + 3 - 4\operatorname{tg}^2 2x = 0.$$

Это биквадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} 2x$. Решая его, находим

$$\operatorname{tg} 2x = 1, \quad \operatorname{tg} 2x = -1, \quad \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} \text{ и } \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}.$$

Откуда

$$2x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad 2x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$2x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad 2x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi,$$

или

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad x_{3,4} = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}.$$

г) Разделив обе части равенства на $\cos^5 x$, получим

$$\operatorname{tg}^5 3x + \operatorname{tg}^3 3x + 8\operatorname{tg}^2 3x + 8 = 0.$$

Преобразуем левую часть его

$$\operatorname{tg}^3 3x(\operatorname{tg}^2 3x + 1) + 8(\operatorname{tg}^2 3x + 1) = 0,$$

$$(\operatorname{tg}^2 3x + 1)(\operatorname{tg}^3 3x + 8) = 0.$$

Поскольку $\operatorname{tg}^2 3x + 1 \neq 0$ (как сумма двух положительных чисел), то получаем

$$\operatorname{tg}^3 3x + 8 = 0.$$

Разложим левую часть как сумму кубов

$$(\operatorname{tg} 3x + 2)(\operatorname{tg}^2 3x - 2\operatorname{tg} 3x + 4) = 0.$$

Приравниваем каждый из сомножителей к нулю.

$$\operatorname{tg} 3x + 2 = 0, \quad \operatorname{tg} 3x = -2,$$

$$3x = \operatorname{arc\,tg}(-2) + k\pi, \quad x = \frac{\operatorname{arc\,tg}(-2)}{3} + \frac{k\pi}{3},$$

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\operatorname{tg} 3x + 4 = 0.$$

Это уравнение не имеет решений, поскольку квадратный трехчлен $y^2 - 2y + 4$ не имеет действительных корней.

№ 18.9. Решить уравнения:

а) $6\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 3$;

б) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;

в) $2\sin^2 x + \cos x - 3\sin x + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Это примеры уравнений, сводящихся к однородным

а) $6\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 3(\cos^2 x + \sin^2 x);$

$$6\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0;$$

$$3\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 0.$$

Это уже однородное уравнение. Разделив обе части его на $\cos^2 x$, получим

$$3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x_1 = 1, \quad \operatorname{tg} x_2 = -\frac{5}{6}$$

и

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{5}{6}\right) + k\pi.$$

б) Возведем обе части равенства в квадрат

$$3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 4.$$

Дальше решаем, как предыдущий пример

$$3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 4(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

$$3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x - 4\cos^2 x - 4\sin^2 x = 0,$$

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

в) Перепишем уравнение в виде

$$2\sin^2 x + 1 = 3\sin x - \cos x.$$

Возведем обе части его в квадрат

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1 = 9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x$$

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1(\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$= (9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

После преобразований получим уравнение

$$3\sin^3 x\cos x - 2\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin x\cos^3 x = 0,$$

которое является однородным уравнением четвертой степени.

Однако оно проще решается, если вынести за скобки $\cos x \sin x$

$$\cos x \sin x\,(3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x) = 0.$$

Приравнивая каждый из сомножителей к нулю, найдем

$$\cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\sin x = 0, \quad x_2 = k\pi,$$

$$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Если левую часть этого равенства преобразовать

$$3(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x\cos x = 3 - \sin 2x,$$

то видно, что равенство $3 = \sin 2x$ невозможно. Следовательно, остается $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $x_2 = k\pi$. Однако не все эти значения удовлетворяют исходному уравнению. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что искомыми корнями будут

$$x_1 = (2k + 1)\pi,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

№ 18.10. Решить уравнения

а) $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x)$;

б) $8\sin x\cos 2x\cos x = \sqrt{3}$;

в) $\sin 2x\cos x = \cos 2x\sin x$;

г) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2}$.

Р е ш е н и е. Это простейшие примеры тригонометрических уравнений, содержащих разные аргументы. Все они решаются путем сведения их к уравнению от одного аргумента.

а) Выразим $\cos 2x$ через половинный аргумент

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin x).$$

Разложим левую часть как разность квадратов. Вынесем за скобки общий множитель $\cos x - \sin x$

$$(\cos x - \sin x)\left(\cos x + \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Приравнивая каждый из сомножителей к нулю, получим $\cos x - \sin x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 1$, откуда

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\cos x + \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Приведем это уравнение к однородному. Для этого перенесем свободный член в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат.

$$\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Дальше проведем преобразования, аналогичные примеру № 18.9 (а и б)

$$\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 x - 2\cos x \sin x = 0,$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Откуда находим

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

б) Для решения этого примера воспользуемся формулой синуса двойного угла. Левую часть уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$8\sin x \cos 2x \cos x = 4 \cdot 2\sin x \cos x \cos 2x = 4\sin 2x \cos 2x =$$
$$= 2 \cdot 2\sin 2x \cos 2x = 2\sin 4x.$$

Поэтому уравнение примет вид

$$2\sin 4x = \sqrt{3} \text{ или } \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и

$$4x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$$

или окончательно

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}.$$

в) Если уравнение переписать в виде

$$\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \sin x = 0,$$

то на основании теоремы сложения левая часть его равна

$$\sin (2x - x) = \sin x$$

и уравнение принимает вид $\sin x = 0$, откуда $x = k\pi$.

г) Преобразуем левую часть

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \sin \frac{x}{2}$$

или

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Вынося за скобки $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, получим

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad x_1 = 2k\pi,$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad x_2 = (2k + 1)\pi,$$

$$1 - \cos \frac{x}{2} = 0, \quad x_3 = 4k\pi.$$

Корень $x_2 = (2k + 1)\pi$ не удовлетворяет уравнению. Это лишний корень, который появился в результате умножения на знаменатель $\cos^2 \frac{x}{2}$. Все значения корня $x_3 = 4k\pi$ находятся среди значений корня $x_1 = 2k\pi$. Поэтому $x = 2k\pi$.

№ 18.11. Решить уравнения:

а) $\sin 4x + 3 \sin 2x = \operatorname{tg} x$;

б) $\operatorname{tg} x = (2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;

в) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 1$;

г) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Р е ш е н и е.

а) $2 \sin 2x \cdot \cos 2x + 3 \sin 2x = \operatorname{tg} x$.

Выразим $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Тогда уравнение перепишется

$$\frac{4 \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} + \frac{6 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

Освобождаясь от знаменателя и упрощая, получим

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^4 x - 9) = 0$$

или

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg}^2 x + 3) = 0.$$

Множитель $\operatorname{tg}^2 x + 3 \neq 0$, поэтому для нахождения x получаем простейшие уравнения $\operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, из которых находим

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ и } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Это и есть решение данного уравнения.

б) Уравнение приводится к виду, содержащему только $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$, если представить $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{3}\right)$ и воспользоваться формулами тангенса суммы и тангенса двойного аргумента

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{2x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}}{1 - \operatorname{tg} \frac{2x}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3}} = \frac{\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}}{1 - \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}}}.$$

Уравнение примет вид

$$\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}+\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}}=(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{x}{3}$$

или после упрощения —

$$\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{3}-\operatorname{tg}^3\frac{x}{3}}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}=(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{x}{3}.$$

Вынося $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ за скобки, для нахождения x получаем два уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0 \text{ и } \operatorname{tg}^2\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{5+3\sqrt{3}},$$

откуда находим

$$x=3k\pi, \quad x=\pm 3\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}-1}{5+3\sqrt{3}}+3k\pi.$$

в) Воспользовавшись равенствами $2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x$ и $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ данное равенство после несложных преобразований приводится к виду

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0,$$

которое является квадратным относительно $\cos x$. Решая это квадратное уравнение, для нахождения x получаем два простейших уравнения

$$\cos x=-1 \quad \text{и} \quad \cos x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$x=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi$$

и

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

Эти значения и дают решения исходного уравнения.

г) Сделаем следующие преобразования:

$$\sin^2 2x = \sin^2 3x - \sin^2 x,$$

$$\sin^2 2x = (\sin 3x + \sin x)(\sin 3x - \sin x).$$

Применяя формулы (16.25) и (16.26), получим

$$\sin^2 2x = 2 \sin 2x \cos 2x \, 2 \cos 2x \sin x$$

или

$$\sin^2 2x = \sin 2x \sin 4x.$$

Вынося за скобку общий множитель $\sin 2x$, имеем

$$\sin 2x (\sin 4x - \sin 2x) = 0,$$

и снова применяя формулу (16.26), получим

$$\sin 2x \, 2 \cos 3x \sin x = 0.$$

Для нахождения x получаем уравнения

$$\sin x = 0, \quad \sin 2x = 0, \quad \cos 3x = 0.$$

Откуда

$$x = k\pi, \quad x = \frac{k\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

№ 18.12. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2} \cdot 2^{\cos x} = 1;$

б) $a^{1+\operatorname{tg} x} = a^{\sqrt{3}(1+\operatorname{ctg} x)};$

в) $a^{4\sin^2 x} \cdot a^{3 \sin^2 x} = a^4 \cdot a^{3 \sin x};$

г) $5 \cdot 4^{1-\cos^2 x} - 7 \cdot 2^{\sin^2 x} = 6.$

Р е ш е н и е.

а) $2^{\frac{1}{2} + \cos x} = 2^0$. Поэтому $\frac{1}{2} + \cos x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Откуда $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

б) Данное уравнение равносильно следующему:

$$1 + \operatorname{tg} x = \sqrt{3}(1 + \operatorname{ctg} x)$$

или

$$1 + \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg} x}.$$

Вынося за скобку общий множитель $1 + \operatorname{tg} x$

$$\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})}{\operatorname{tg} x} = 0$$

и приравнивая нулю каждый сомножитель получим

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3},$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ и $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

в) Разделим обе части равенства на выражение, стоящее в правой части его

$$a^{4\sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 - 3\sin x} = a^0.$$

Это равенство равносильно следующему:

$$4\sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 - 3\sin x = 0$$

или

$$4(\sin^3 x - 1) + 3\sin x(\sin x - 1) = 0.$$

Раскладывая $\sin^3 x - 1$ как разность кубов и вынося за скобку множитель $\sin x - 1$, получим

$$(\sin x - 1)(4\sin^2 x + 7\sin x + 4) = 0.$$

Откуда находим

$$\sin x = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

г) $5 \cdot 2^{2\sin^2 x} - 7 \cdot 2^{\sin^2 x} = 6$.

Обозначим $2^{\sin^2 x} = z$. Получим квадратное уравнение $5z^2 - 7z - 6 = 0$ с корнями $z_1 = 2$ и $z_2 = -\frac{3}{5}$. Для нахождения x получаем два уравнения

$$2^{\sin^2 x} = 2 \quad \text{и} \quad 2^{\sin^2 x} = -\frac{3}{5}.$$

Первое уравнение дает корни $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, а второе уравнение решений не имеет.

№ 18.13. Решить графически уравнения:

а) $\sin x = 1 - \frac{x}{3}$;

б) $\cos x - x^2 + 1 = 0$;

в) $2^x - 2 = \cos x$.

Р е ш е н и е.

а) Корни этого уравнения находим как абсциссы точек пересечения графиков функций $y_1 = \sin x$ и $y_2 = 1 - \frac{x}{3}$. Таких точек будет три. Поэтому уравнение имеет три корня

$$x_1 \approx 0{,}72;\ x_2 \approx 3{,}27;\ x_3 \approx 5{,}24.$$

б) Представим уравнение в виде $\cos x = x^2 - 1$ и построим графики функций $y_1 = \cos x$, $y_2 = x^2 - 1$. Эти графики имеют две точки пересечения с абсциссами $x_1 \approx -1{,}2$, $x_2 \approx 1{,}2$.

Эти величины и дают приближенное значение корней уравнения.

в) Абсцисса пересечения графиков $y_1 = 2^x$ и $y_2 = \cos x + 2$ дает приближенное значение корня $x \approx 1{,}18$.

Предлагаем читателям самостоятельно провести соответствующие построения.

№ 18.14. Решить системы тригонометрических уравнений:

а) $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y - x = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0{,}5 \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \sqrt{3} \\ x + y = \dfrac{5}{12}\pi \end{cases}$.

Р е ш е н и е. а) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$.

Но $x + y = \frac{\pi}{4}$. Поэтому

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos\frac{\pi}{4}\right]$$

и первое уравнение истемы примет вид

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$$

или

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Откуда $x-y=\pm\frac{\pi}{6}$.

Решая системы

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{6},\\ x+y=\frac{\pi}{4},\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x-y=-\frac{\pi}{6},\\ x+y=\frac{\pi}{4},\end{cases}$$

Находим

$$x_1=\frac{5}{24}\pi,\quad y_1=\frac{1}{24}\pi;\quad x_2=\frac{1}{24}\pi,\quad y_2=\frac{5}{24}\pi.$$

б) Преобразуем выражение, стоящее в левой части первого равенства, используя равенство (16.27)

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y+x\right)}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=$$

$$=\frac{\cos(y-x)}{\cos x\sin y}.$$

Учитывая, что $y-x=\frac{\pi}{6}$, находим

$$\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\cos x\sin y}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\quad\text{или}\quad 2\cos x\sin y=\frac{3}{2}.$$

Согласно равенства (16.22)

$$2\cos x\sin y=\sin(y+x)+\sin(y-x)=\sin(y+x)+\frac{1}{2}.$$

Итак, $\frac{3}{2}=\sin(y+x)+\frac{1}{2}$ или $\sin(y+x)=1$, откуда $y+x=\frac{\pi}{2}$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}y+x=\frac{\pi}{2},\\ y-x=\frac{\pi}{6},\end{cases}$$

находим $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$.

в) Преобразуем левую часть первого уравнения

$$\sin x - \cos y = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) =$$

$$= 2\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2}\sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x + y - \frac{\pi}{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{x + y - \frac{\pi}{2}}{2}.$$

Из равенства

$$2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{x + y - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

находим, что

$$\sin\frac{x + y - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x + y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi.$$

Решая систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{6}\pi, \\ x - y = \frac{\pi}{6}, \end{cases}$$

находим $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{3}$.

г) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} =$ (по формулам (16.20) и (16.21))

$= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)} =$ (используя второе уравнение)

$= \frac{\cos(x - y) - \cos\frac{5}{12}\pi}{\cos(x - y) + \cos\frac{5}{12}\pi}$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$\frac{\cos(x - y) - \cos\frac{5}{12}\pi}{\cos(x - y) + \cos\frac{5}{12}\pi} = \sqrt{3},$$

откуда находим

$$\cos(x-y)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\cos\frac{5}{12}\pi.$$

Но

$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Поэтому

$$\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})\text{ и }x-y=$$

$$=\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})=\pi\pm\frac{\pi}{12}.$$

Итак, для нахождения x и y получаем две системы

$$\begin{cases}x-y=\frac{11}{12}\pi,\\ x+y=\frac{5}{12}\pi\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x-y=\frac{13}{12}\pi,\\ x+y=\frac{5}{12}\pi,\end{cases}$$

решая которые, находим

$$x_1=\frac{2}{3}\pi,\quad y_1=-\frac{\pi}{4};\qquad x_2=\frac{3}{4}\pi,\quad y_2=-\frac{\pi}{3}.$$

№ 18.15. Решить системы тригонометрических уравнений:

а) $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4}(\sqrt{3}+1),\\ \cos x\cos y=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1);\end{cases}$ б) $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2,\\ 2\cos x\cos y=1.\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sin x+\sin y=0{,}2,\\ \cos x+\cos y=-0{,}2.\end{cases}$

Р е ш е н и е.

а) Ко второму уравнению системы сначала прибавим, а затем из него вычтем первое уравнение

$$\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x - y = \pm \frac{\pi}{6}$. Со второго уравнения $x + y = \pi \pm \frac{\pi}{3}$.

Итак, для нахождения x и y получаем четыре системы

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ x + y = \frac{4}{3}\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ x + y = \frac{2}{3}\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{6}, \\ x + y = \frac{4}{3}\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{6}, \\ x + y = \frac{2}{3}\pi. \end{cases}$$

Решая их, находим

$$x_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad x_2 = \frac{5}{12}\pi, \quad x_3 = \frac{7}{12}\pi, \quad x_4 = \frac{\pi}{4},$$

$$y_1 = \frac{7}{12}\pi, \quad y_2 = \frac{\pi}{4}, \quad y_3 = \frac{3}{4}\pi; \quad y_4 = \frac{5}{12}\pi.$$

Эти пары значений x и y и есть решение исходной системы.

б) Преобразуем левую часть первого уравнения системы

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = \frac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y}.$$

Тогда с учетом второго уравнения первое уравнение примет вид $\frac{\sin (x+y)}{\frac{1}{2}} = 2$ или $\sin (x + y) = 1$. Откуда $x + y = \frac{\pi}{2}$. Припишем к этому уравнению второе уравнение исходной системы и решим систему

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Согласно формулы (16.20) $\cos (x - y) + \cos (x + y) = 1$ или $\cos (x - y) = 1$, поскольку $x + y = \frac{\pi}{2}$ и $\cos (x + y) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Поэтому $x - y = 0$ и, решая систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

находим $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$.

Это и есть решение исходной системы.

в) По формулам (16.23) и (16.25) приводим систему к виду

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{2}{10}, \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=-\dfrac{2}{10}. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}=-1$, откуда $\dfrac{x+y}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$ или $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4}\pi$.

Подставляя найденное значение полусуммы аргументов в одно из уравнений вышеприведенной системы, например, во второе, получаем

$$2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{2}{10} \quad \text{или} \quad 2\cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{2}{10},$$

откуда

$$\cos\frac{x-y}{2}=\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

и

$$\frac{x-y}{2}=\arccos\left(\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}\right).$$

Решая систему

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{\pi}{2}, \\ x-y=\arccos\left(\pm\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right), \end{cases}$$

получаем

$$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\left(\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$y=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\left(\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}\right).$$

ЗАНЯТИЕ ДЕВЯТНАДЦАТОЕ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Теоретический материал

1. Простейшие тригонометрические неравенства. Неравенство называется тригонометрическим, если неизвестное в нем содержится под знаком тригонометрической функции.

Примером тригонометрических неравенств могут служить неравенства

$$\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} x - \cos x > 2, \quad 4^{1-\sin x} > 8 \text{ и т. д.}$$

Решение любого тригонометрического неравенства сводится к решению так называемых простейших тригонометрических неравенств, подобно тому, как это имеет место при решении тригонометрических уравнений. Поэтому рассмотрим более подробно вопрос о решении простейших тригонометрических неравенств.

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$\sin x > a, \quad \cos x > c, \quad \operatorname{tg} x > m, \quad \operatorname{ctg} x > p,$$
$$\sin x < b, \quad \cos x < d, \quad \operatorname{tg} x < n, \quad \operatorname{ctg} x < l.$$

Неравенство

$$\sin x > a \tag{19.1}$$

имеет решение лишь в том случае, если $a < 1$, поскольку $\sin x$ не может принимать значений больших 1. Поэтому, если $a \geqslant 1$, то неравенство (19.1) не имеет решений, если же $-1 < a < 1$, то решение существует и записывается в виде

$$\arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi$$

или

$$2k\pi + \arcsin a < x < (2k+1)\pi - \arcsin a. \tag{19.2}$$

Очень удобно при решении таких неравенств пользоваться единичным кругом. Например, неравенство (19.1) будут удовлетворять те значения углов, для которых ордината конца подвижного радиуса будет больше a (если $a < 1$). На рис. 19.1 множество углов, удовлетворяющих этому условию, заштриховано.

Если $a < -1$, то неравенство (19.1) имеет место для любых значений x.

Неравенство

$$\sin x < b \tag{19.3}$$

имеет решение при условии, что $b > -1$, поскольку $\sin x$ не может принимать значения меньше -1. Поэтому, если $b < -1$, нера-

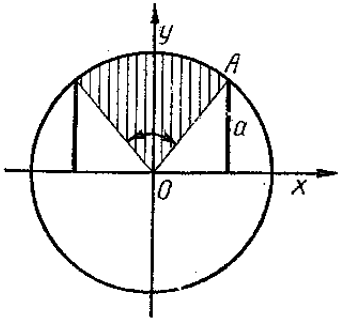


Рис. 19. 1.

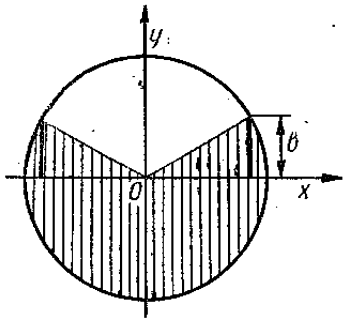


Рис. 19. 2.

венство (19.3) не имеет решений, если же $1 > b > -1$, то неравенство имеет решение и оно записывается в виде

$$\pi - \arcsin b + 2k\pi < x < \arcsin b + 2k\pi$$

или

$$(2k+1)\pi - \arcsin b < x < 2k\pi + \arcsin b. \tag{19.4}$$

На рис. 19.2 это множество заштриховано. Если $b > 1$, то неравенство (19.3) выполняется при любом значении x.

Неравенство

$$\cos x > c \tag{19.5}$$

не имеет решения, если $c > 1$. Если же $-1 < c < 1$, то неравенство имеет решение и оно записывается в виде (см. рис. 19.3)

$$-\arccos c + 2k\pi < x < +\arccos c + 2k\pi. \tag{19.6}$$

Если $c < -1$, то неравенство выполняется для любого значения x.

Неравенство

$$\cos x < d \tag{19.7}$$

имеет решение, если $d > -1$ и не им ет решений, если $d < -1$. При этом, если $-1 < d < 1$ неравенству (19.7) будут удовлетво-

рять все значения x из промежутка (см. рис. 19.4)

$$\arccos d + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos d + 2k\pi$$

или

$$2k\pi + \arccos d < x < 2\pi(k+1) - \arccos d. \qquad (19.8)$$

Если же $d > 1$, то неравенство (19.7) выполняется при любых значениях x.

Неравенства

$$\operatorname{tg} x > m, \qquad (19.9)$$

$$\operatorname{tg} x < n \qquad (19.10)$$

имеют решения для любых значений m и n, поскольку $\operatorname{tg} x$ — функция неограниченная и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

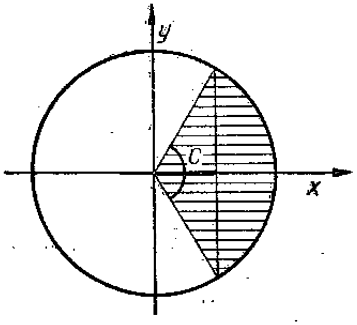


Рис. 19.3.

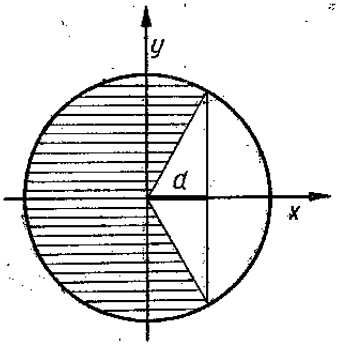


Рис. 19. 4.

Неравенс ву (19.9) удовлетворяют все значения x из промежутка (рис. 19.5)

$$\operatorname{arctg} m + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

или

$$k\pi + \operatorname{arctg} m < x < \frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad (19.11)$$

Решение нерав нства (19.10) записывается в виде (рис. 19.6)

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg} n + k\pi$$

или

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) < x < k\pi + \operatorname{arctg} n. \qquad (19.12)$$

Аналогично записываются решения неравенств

$$\operatorname{ctg} x > p, \tag{19.13}$$

$$\operatorname{ctg} x < l, \tag{19.14}$$

которые имеют решения при любых значениях k и l.

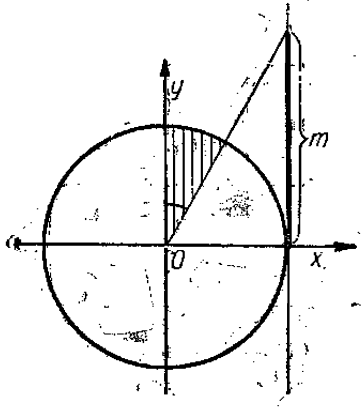


Рис. 19. 5.

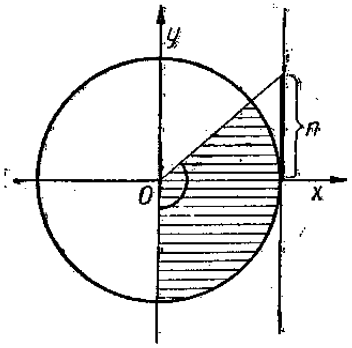


Рис. 19. 6.

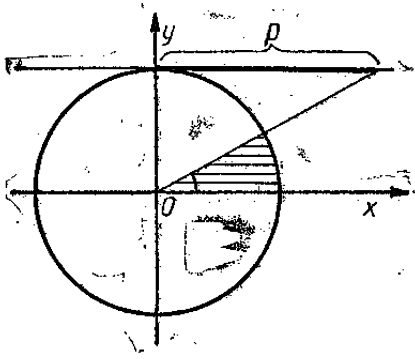


Рис. 19. 7.

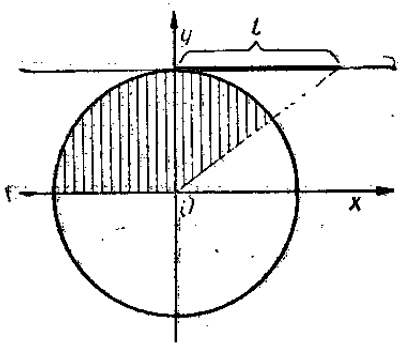


Рис. 19. 8.

Неравенству (19. 13) удовлетворяют все значения x из промежутка (рис. 19.7)

$$k\pi < x < \operatorname{arc\,ctg} p + k\pi, \tag{19.15}$$

а неравенству (19.14) — из промежутка (рис. 19.8)

$$\operatorname{arcctg} l + k\pi < x < \pi + k\pi$$

или

$$k\pi + \operatorname{arcctg} l < x < \pi(k+1). \tag{19.16}$$

Все случаи простейших тригонометрических неравенств сведены в табл. 5

Таблица 5

$T(x)$	$T(x) > a$			$T(x) < a$		
	$a < -1$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$a > 1$	$a < -1$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$a > 1$
sin	для всех x	$2k\pi + \arcsin a < x < (2k+1)\pi - \arcsin a$	не имеет	не имеет	$(2k+1)\pi - \arcsin a < x < 2k\pi + \arcsin a$	для всех x
cos	для всех x	$2k\pi - \arccos a < x < 2k\pi + \arccos a$	не имеет	не имеет	$2k\pi + \arccos a < x < 2\pi(k+1) - \arccos a$	для всех x
tg	$k\pi + \operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2}(2k+1)$			$\frac{\pi}{2}(2k-1) < x < k\pi + \operatorname{arctg} a$		
ctg	$k\pi < x < k\pi + \operatorname{arcctg} a$			$k\pi + \operatorname{arcctg} a < x < \pi(k+1)$		

2. Общие замечания при решении и доказательстве тригонометрических неравенств. Выше отмечалось, что решение любого тригонометрического неравенства сводится к решению простейших тригонометрических неравенств. Поэтому процесс их решения можно как бы разбить на две части — приведение тригонометрического неравенства к простейшим неравенствам и решение полученных простейших тригонометрических неравенств. Решение простейших неравенств изложено в предыдущем пункте. Что касается способов сведения тригонометрических неравенств к простейшим, то их множество и они в основном сходны с теми, которыми пользуются при решении тригонометрических уравнений.

Методы доказательства тригонометрических неравенств почти ничем не отличаются от методов доказательства алгебраических неравенств.

ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ

№ 19.1. Решить неравенства:

а) $1 + 2\sin x < 0$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x > 1$;

в) $\sin(3x+2) > \frac{1}{2}$;

г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1<0$.

Р е ш е н и е.

а) Данное неравенство равносильно следующему: $\sin x < -\frac{1}{2}$. Это неравенство, согласно (19.4), имеет решение

$$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6}<x<-\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

б) Согласно (19.11)

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{2}(2k+1).$$

Тогда

$$4k+1<x<2(2k+1).$$

в) Согласно (19.2)

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}<3x+2<(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}.$$

Откуда находим

$$\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{18}-\frac{2}{3}<x<\frac{2k+1}{3}\pi-\frac{\pi}{18}-\frac{2}{3}.$$

г) Неравенство равносильно следующему:

$$\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$, то согласно (19.16)

$$k\pi+\frac{\pi}{3}<x-\frac{\pi}{4}<\pi(k+1).$$

Откуда

$$k\pi+\frac{7}{12}\pi<x<\frac{\pi}{4}+\pi(k+1).$$

Для контроля полезно сопровождать решение простейших неравенств графическим построением. Например, на рис. 19.9 и 19.10 представлено графическое решение неравенств а) и г). На рисунках заштрихованы те значения x, для которых неравенства справедливы.

№ 19.2. Решить неравенства:

а) $3 - 4\cos^2 x > 0$;

б) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$;

в) $3\cos^2 x + 7\sin^2 x > 4$;

г) $\cos 2x + \sqrt{2} + 1 - (2 + \sqrt{2})\cos x < 0$.

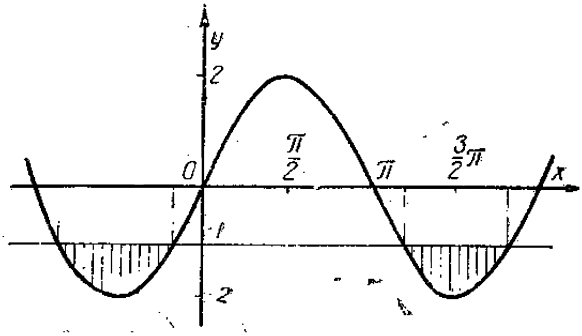


Рис. 19. 9.

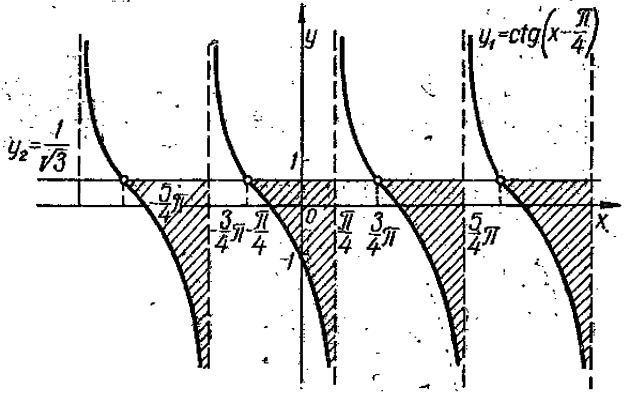


Рис. 19. 10.

Решение.

а) $\cos^2 x < \frac{3}{4}$. Это неравенство равносильно неравенству $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, которое, в свою очередь, равносильно системе неравенств

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$, решение неравенств $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ согласно (19.6) и (19.8) можно записать в виде

$$\frac{6}{7}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ и } \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Их общее решение и даст решение исходного неравенства.

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ и } \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

На рис. 19.11 множество решений неравенства $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ изображено частью круга, имеющего штриховку с наклоном вправо, а неравенства $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ — с наклоном влево. Часть круга, имеющая двойную штриховку, — это решение исходного неравенства.

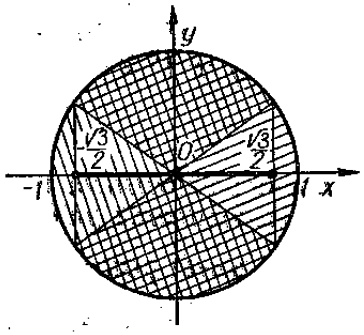


Рис. 19.11.

б) Обозначим $\cos x = y$. Получим неравенство $2y^2 - 3y + 1 = 0$. Квадратный трехчлен $2y^2 - 3y + 1$ имеет корни $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому неравенство имеет решение $y \geqslant 1$ и $y \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности двух неравенств $\cos x \geqslant 1$ и $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

Первое неравенство имеет решение $x = 2k\pi$, а второе $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

в) Представим данное неравенство в виде $3\cos^2 x + 7\sin^2 x - 4 > 0$ и преобразуем левую часть его следующим образом:

$$3\cos^2 x + 7\sin^2 x - 4(\cos^2 x + \sin^2 x) = -\cos^2 x + 3\sin^2 x =$$
$$= -(\cos^2 x + \sin^2 x) + 4\sin^2 x = -1 + 4\sin^2 x.$$

Следовательно, неравенство примет вид $-1 + 4\sin^2 x > 0$ или $\sin^2 x > \frac{1}{4}$.

Извлекая корень квадратный из обеих частей, получим равносильное неравенство $|\sin x| > \frac{1}{2}$, которое равносильно совокупности неравенств

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x < -\frac{1}{2}.$$

Решение этих неравенств

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

и дает решение исходного неравенства.

г) Учитывая, что $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, данное неравенство можно представить в виде

$$2\cos^2 x - (2 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} < 0.$$

Обозначая $\cos x = y$ и решая квадратное неравенство $2y^2 - (2 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} < 0$, приходим к системе неравенств

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1,$$

которая равносильна исходному неравенству. Неравенство $\cos x < 1$ выполняется для всех x кроме $x = 2k\pi$. Неравенство $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет решение

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi > x > -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

которое совпадает с решением исходного неравенства.

№ 19.3. Решить неравенства

а) $\sin x + \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) > 1$;

в) $2\sin x \cdot \sin 3x > 1$.

Р е ш е н и е.

а) Преобразуем левую часть неравенства

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{или} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}.$$

Согласно (19.8)

$$\arccos\frac{1}{2}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<2(k+1)\pi-\arccos\frac{1}{2}$$

или

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<2(k+1)\pi-\frac{\pi}{3}.$$

Откуда находим

$$2k\pi+\frac{7}{12}\pi<x<2(k+1)\pi-\frac{\pi}{12}.$$

б) Принимая во внимание тригонометрическое тождество $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, преобразуем неравенство следующим образом:

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}-1>0;\qquad\frac{1+\operatorname{tg}x-1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}>0.$$

Поскольку $1+\operatorname{tg}^2 x$ — величина положительная при любых допустимых значениях x, то последнее неравенство равносильно следующему:

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x>0\quad\text{или}\quad\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x<0.$$

Последнее неравенство является квадратным относительно $\operatorname{tg}x$. Квадратный трехчлен y^2-y имеет корни $y_1=0$ и $y_2=1$, поэтому

$$0<\operatorname{tg}x<1.$$

Неравенство $\operatorname{tg}x>0$ выполняется при $k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$. Неравенство $\operatorname{tg}x<1$ имеет решение $k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Их общим решением будет

$$k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

в) Преобразуем произведение синусов в сумму $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$. Тогда неравенство примет вид

$$\cos 2x-\cos 4x>1.$$

Преобразуем левую часть неравенства

$$\cos 2x-\cos 4x=\cos 2x-2\cos^2 2x+\sin^2 2x=$$
$$=\cos 2x-\cos^2 2x+1-\cos^2 2x=-2\cos^2 2x+\cos 2x+1.$$

С учетом этих преобразований неравенство перепишется в виде

$$2\cos^2 2x-\cos 2x<0.$$

Аналогично предыдущему примеру имеем $0 < \cos 2x < 0{,}5$. Неравенство $\cos 2x < 0{,}5$ выполняется для всех значений x из интервала $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Неравенство $\cos 2x > 0$ имеет решение $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$. Поэтому решение исходного неравенства есть $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

№ 19.4. Решить неравенства:

а) $\operatorname{tg} x (1 + \cos 2x) < \cos 4x \operatorname{tg} 4x$;

б) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$;

в) $3 \sin 4x > 1 - 2\cos^2 x$.

Решение.

а) Преобразуем обе части неравенства

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2\cos^2 x < \frac{\cos 4x \sin 4x}{\cos 4x}; \quad \sin 2x < \sin 4x;$$

$$\sin 2x - \sin 4x < 0; \quad \sin 2x - 2\sin 2x \cos 2x < 0;$$

$$\sin 2x (1 - 2\cos 2x) < 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \sin 2x > 0, \\ 1 - 2\cos 2x < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2x < 0, \\ 1 - 2\cos 2x > 0. \end{cases}$$

Решаем первую систему.

Для первого неравенства

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

для второго

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Их общим решением будет

$$k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Для второй системы аналогично получаем

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi.$$

Итак, неравенство имеет решение

$$k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi.$$

б) Преобразуем произведения косинусов в сумму

$$\cos 2x + \cos 4x < \cos 2x + \cos 12x,$$

$$\cos 4x < \cos 12x.$$

Перенесем $\cos 4x$ в правую часть и преобразуем разность косинусов в произведение

$$\cos 12x - \cos 4x = -2 \sin 8x \sin 4x.$$

Тогда неравенство примет вид

$$-2 \sin 8x \sin 4x > 0$$

или

$$\sin 8x \sin 4x < 0.$$

Если учесть, что $\sin 8x = 2 \sin 4x \cos 4x$, то неравенство можно представить в виде

$$2 \sin^2 4x \cdot \cos 4x < 0.$$

Поскольку $\sin^2 4x$ — величина всегда положительная, то последнее неравенство равносильно следующему:

$$\cos 4x < 0.$$

Откуда

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 4x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

или

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{3}{8}\pi + \frac{k\pi}{2}.$$

в) $1 - 2\cos^2 x = 1 - (1 + \cos 2x) = -\cos 2x.$

Поэтому неравенство перепишется в виде

$$3 \sin 4x + \cos 2x > 0 \quad \text{или} \quad \cos 2x (6 \sin 2x + 1) > 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \cos 2x > 0, \\ 6 \sin 2x + 1 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x < 0, \\ 6 \sin 2x + 1 < 0. \end{cases}$$

Решим первую систему.

Из первого неравенства следует

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Второе неравенство $\sin 2x > -\frac{1}{6}$ дает

$$\pi + \arcsin\frac{1}{6} + 2k\pi > 2x > -\arcsin\frac{1}{6} + 2k\pi$$

или

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6} < x < k\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6}.$$

Общее решение этих двух неравенств

$$\frac{\pi}{4} + k\pi > x > k\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6}$$

есть решение первой системы.

Аналогично получаем решение второй системы

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6} + \frac{2k+1}{2}\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi.$$

Итак, исходное неравенство имеет решение

$$k\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

и

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6} + \frac{2k+1}{2}\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi.$$

№ 19.5. Решить неравенства:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$;

б) $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е.

а) $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x$. Поэтому неравенство примет вид

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x < 0 \quad \text{или} \quad \sin 2x\,(2\cos x + 1) < 0.$$

Последнее неравенство равносильно системам

$$\begin{cases}\sin 2x > 0,\\ 2\cos x + 1 < 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin 2x < 0,\\ 2\cos x + 1 > 0.\end{cases}$$

Первое неравенство первой системы имеет решение $2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$ или $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, а второе $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x <$

$< \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$. Поэтому, решением первой системы будет

$$\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi.$$

(см. рис. 19.12).

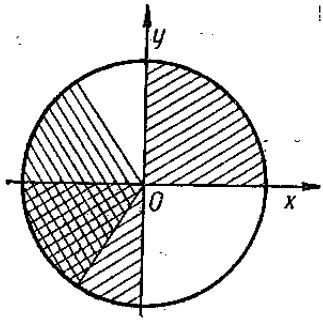


Рис. 19.12.

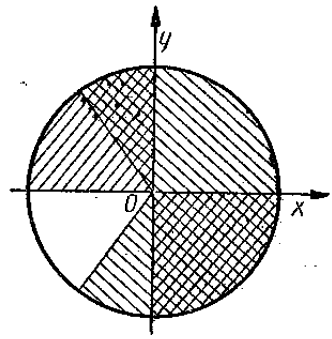


Рис. 19.13.

Аналогично находим решение второй системы.
Из первого неравенства имеем

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k+1)\pi.$$

Со второго неравенства —

$$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

Общим решением этих двух неравенств будет

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{и} \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi.$$

(см. рис. 19.13)
Итак, исходное неравенство имеет решение

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$$

$$\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi.$$

(На рис. 19.12 и 19. 13 этим множествам значений x соответствуют части круга, имеющие двойную штриховку).

б) Представим неравенство в виде

$$2\cos 2x + 2\sin x\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} > 0$$

и преобразуем левую часть следующим образом:

$$2\cos 2x + \sin x\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) > 0,$$

$$2\cos 2x + \operatorname{tg} x\,(2\cos^2 x - 1) > 0,$$

$$2\cos 2x + \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x > 0,$$

$$\cos 2x\,(2 + \operatorname{tg} x) > 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}\cos 2x > 0,\\ \operatorname{tg} x + 2 > 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos 2x < 0,\\ \operatorname{tg} x + 2 < 0.\end{cases}$$

Неравенства первой системы имеют решение:
первое

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

второе

$$-\operatorname{arctg} 2 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Их общим решением, а следовательно, и решением первой системы будет

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Вторая система имеет решение

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\operatorname{arctg} 2 + k\pi.$$

Следовательно, решением исходного неравенства будет

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\operatorname{arctg} 2 + k\pi.$$

На рис. 19.14 и 19.15 представлены решения систем. При этом область со штриховкой вправо соответствует решению первого неравенства, со штриховкой влево — второго неравенства, с двойной штриховкой — решению системы.

№ 19.6. Доказать, что при любых значениях аргумента x выполняются следующие неравенства:

а) $\cos(\cos x) > 0$;

б) $\sqrt{3}|\sin x| \leqslant 3\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$;

в) $0 < \cos^6 x + \sin^{10} x \leqslant 1$.

Решение.

а) Косинус принимает положительные значения в первой и четвертой четверти. Поэтому, чтобы данное неравенство выполнялось,

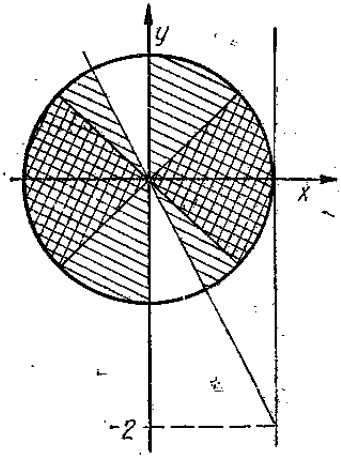


Рис. 19.14.

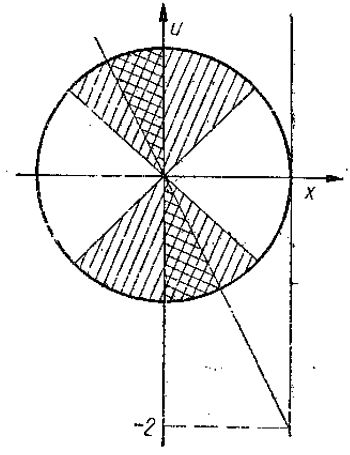


Рис. 19.15.

необходимо, чтобы величина $\cos x$ удовлетворяла неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} < \cos x < \frac{\pi}{2}.$$

Но поскольку $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ для любых значений x, т. е. множество значений, которые может принимать $\cos x$, целиком лежит в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то отсюда делаем заключение, что исходное неравенство верно при любых значениях x.

б) Преобразуем правую часть неравенства

$$3\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1 + 2\cos^2\frac{x}{2} = 2 + \cos x.$$

Поэтому исходное неравенство равносильно следующему:

$$\sqrt{3}|\sin x| \leqslant 2 + \cos x.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат.

При этом, поскольку величины, стоящие в обеих частях неравенства, положительны при любых значениях x, то получим равносильное неравенство

$$3\sin^2 x \leqslant 4 + 4\cos x + \cos^2 x.$$

Заменяя $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и приводя подобные члены, получим

$$4\cos^2 x + 4\cos x + 1 \geqslant 0$$

или

$$(2\cos x + 1)^2 \geqslant 0,$$

которое является очевидным. Тем самым исходное неравенство доказано.

в) Поскольку для любых x $\cos x \leqslant 1$, $\sin x \leqslant 1$ и $\cos^2 x \leqslant 1$, $\sin^2 x \leqslant 1$, то на основании свойства показательной функции (при основании меньшем единицы большему показателю соответствует меньшая степень) имеем

$$\cos^6 x \leqslant \cos^2 x, \quad \sin^{10} x \leqslant \sin^2 x.$$

Складывая почленно эти два неравенства, получим

$$\cos^6 x + \sin^{10} x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 x$$

или

$$\cos^6 x + \sin^{10} x \leqslant 1.$$

Левая часть неравенства очевидна, поскольку $\cos^6 x \geqslant 0$ и $\sin^{10} x \geqslant 0$

ЗАНЯТИЕ ДВАДЦАТОЕ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Теоретический материал

1. Обратные функции. На практике очень часто приходится не только находить значения функции по данным значениям аргумента, но и решать обратную задачу, т. е. по данным значениям функции находить соответствующие им значения аргумента. Другими словами, очень часто приходится иметь дело с функциями, обратными данным.

С понятием обратной функции мы уже встречались при изучении показательной и логарифмической функции. Известно, что логарифмическая функция получается из показательной, если в последней независимую переменную x принять за функцию, а функцию y — за независимую переменную.

Функция, обратная данной функции, получается из последней, если в ней за независимую переменную принять функцию, а функцию — за независимую переменную.

В математике принято обозначать аргумент любой функции через x, а саму функцию — через y. Поэтому, чтобы получить аналитическое выражение функции, обратной данной функции $y = f(x)$, поступают следующим образом. Выражают x через y, для чего необходимо решить равенство $y = f(x)$ относительно x, и в полученном соотношении $x = \varphi(y)$ меняют x на y, а y на x. В результате получаем функцию $y = \varphi(x)$, которая является обратной функции $y = f(x)$.

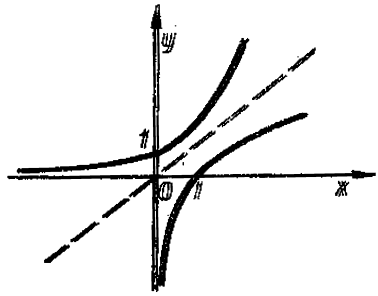


Рис. 20.1.

Задача нахождения обратных функций для некоторых данных функций решается очень просто. Например, для линейной функции $y = ax + b$, обратной функцией является также линейная функция $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$, функция, обратная квадратной функции $y = ax^2$, имеет вид $y = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{x}$. Однако в большинстве случаев такое обращение функций очень сложно, а иногда и вовсе невыполнимо. Так, например, для обращения показательной функции $y = a^x$ был введен условный знак $y = \log_a x$.

Поскольку прямая и обратная функции выражают одну и ту же зависимость и отличаются только обозначениями функции и аргумента, то график обратной функции получается из графика прямой функции, если в последнем положительное направление оси ox принять за положительное направление оси oy и наоборот. Другими словами, графики функции $y = f(x)$ и функции $y = \varphi(x)$, ей обратной, симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатного углов. Например, на рис. 20.1 представлены графики функций $y = 2^x$ и ей обратной $y = \log_2 x$.

2. Обратные тригонометрические функции. В равенствах $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ независимой переменной является угол или дуга x, а функцией синус, косинус, тангенс и котангенс. Чтобы найти функции, обратные названным тригонометрическим функциям, нужно аргумент x выразить через функцию y. Оказывается, что с помощью алгебраических действий этого сделать невозможно. Поэтому для обращения тригонометрических

функций введены специальные обозначения, подобно тому, как для обращения показательной функции введен специальный знак log.

Если в прямых тригонометрических функциях обозначить аргумент через y, а функцию через x, то в результате обращения получим:

функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ * является обратной для функции $x = \sin y$;

функция $y = \operatorname{Arccos} x$ есть обратная для функции $x = \cos y$;

функции $y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ являются обратными соответственно для функций $x = \operatorname{tg} y$ и $x = \operatorname{ctg} y$.

Прямые тригонометрические функции являются однозначными функциями своего аргумента. Это значит, что каждому допустимому значению аргумента x соответствует одно и только одно значение функции. Но в силу периодичности тригонометрических функций одно и то же значение тригонометрическая функция может принимать при различных значениях аргумента. При этом число таких значений бесконечно. Говорят поэтому, что обратные тригонометрические функции — многозначные функции своего аргумента. Обычно наименьшее по абсолютной величине значение обратных тригонометрических функций обозначают соответственно через $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$. Эти значения расположены в промежутках: для синуса от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; для косинуса от 0 до π; для тангенса и котангенса соответственно от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и от 0 до π и называются главными значениями обратных тригонометрических функций.

Очень важно уяснить себе разницу между, например, $\operatorname{Arcsin} x$ и $\arcsin x$. $\operatorname{Arcsin} x$ — это бесконечное множество значений функции, соответствующих одному и тому же значению аргумента x; $\arcsin x$ — это одно значение функции $\arcsin x$, которое расположено в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\operatorname{Arc}\sin x = (-1)^k \arcsin x + k\pi.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2k\pi,$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + k\pi,$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x + k\pi.$$

* Arc есть сокращение латинского слова arcus, что означает дуга. Arcsinx означает «дуга, синус которой равен x».

3. Графики обратных тригонометрических функций. Как было уже указано в п. 1 графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Поэтому для построения графиков обратных тригонометриче-

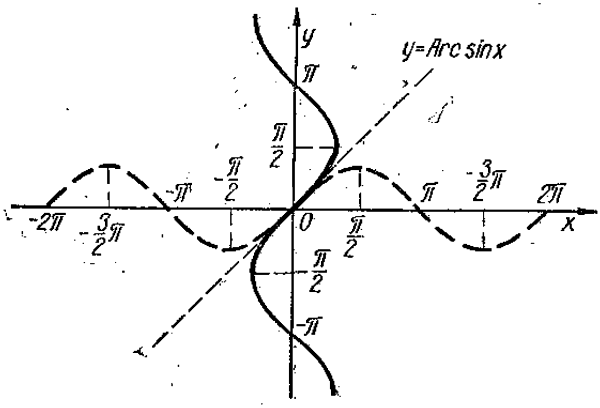


Рис. 20.2.

ских функций достаточно графики соответствующих прямых функций симметрично отобразить относительно указанной биссектрисы.

На рисунках 20.2—20.5 представлены графики обратных тригонометрических функций, жирной линией на них выделены главные

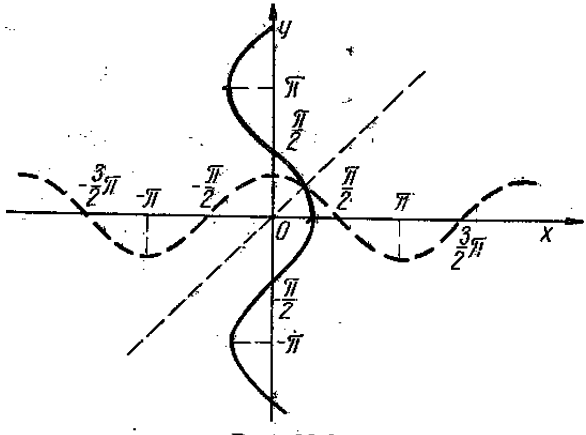


Рис. 20.3.

значения. Для сравнения штриховыми линиями нанесены также графики соответствующих прямых функций.

4. Зависимости между обратными тригонометрическими функциями и действия над ними. Для главных значений обратных

тригонометрических функций справедливы равенства

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \qquad (20.1)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}. \qquad (20.2)$$

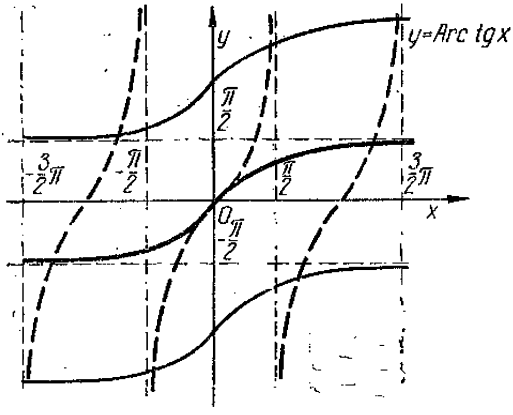


Рис. 20.4.

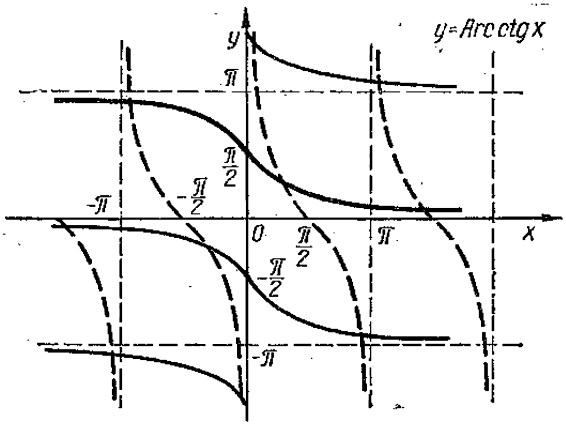


Рис. 20.5.

Причем равенство (20.1) выполняется для значений x, для которых $|x| \leqslant 1$, а равенство (20.2) справедливо при любых значениях x.

Из действий, производимых над обратными тригонометрическими функциями, особый интерес представляет нахождение тригонометрических функций от обратных тригонометрических функций.

Например, исходя из определения обратных тригонометрических функций, можно записать следующие простейшие зависимости:

$$\sin(\arcsin x) = x; \tag{20.3}$$

$$\cos(\arccos x) = x; \tag{20.4}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \tag{20.5}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x. \tag{20.6}$$

Достаточно словесно прочитать любую из формул, чтобы убедиться в очевидности записанных равенств. Например, равенство (20.3) словесно звучит следующим образом: «Синус угла (или дуги), синус которого равен x, равен x».

На основании этих простейших равенств можно получить и более сложные зависимости. Например, поскольку $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, то $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}$. Но, согласно (20.4), $\cos(\arccos x) = x$. Поэтому

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}. \tag{20.7}$$

Аналогично можно показать, что

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}; \tag{20.8}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}; \tag{20.9}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{20.10}$$

Очень полезно уметь выражать одну обратную тригонометрическую функцию через другую.

Пусть, например, требуется выразить $\arccos x$ через $\arcsin x$, если $x \geqslant 0$.

Находим

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Обращая последнее равенство, получим

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}. \tag{20.11}$$

Еще один пример: выразить $\operatorname{arctg} x$ через $\arcsin x$.

На основании равенства

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

находим

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Обращая последнее равенство, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad (20.12)$$

5. Решение простейших уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции. Самые простые уравнения этого класса имеют вид

$$\arcsin x = a; \qquad (20.13)$$

$$\arccos x = b; \qquad (20.14)$$

$$\operatorname{arctg} x = c; \qquad (20.15)$$

$$\operatorname{arcctg} x = d. \qquad (20.16)$$

Для решения уравнения (20.13) возьмем от обеих частей его синус. Получим

$$\sin \arcsin x = \sin a \quad \text{или} \quad x = \sin a.$$

Это и есть решение уравнения (20.13).

Аналогично решаются и остальные уравнения

$$\cos \arccos x = \cos b, \qquad x = \cos b;$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = \operatorname{tg} c, \qquad x = \operatorname{tg} c;$$

$$\operatorname{ctg} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{ctg} d, \qquad x = \operatorname{ctg} d.$$

Более сложные уравнения с обратными тригонометрическими функциями путем тождественных преобразований сводятся к указанным выше простейшим уравнениям. Несколько примеров таких уравнений мы рассмотрим в качестве примеров во второй части занятия.

ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ

№ 20.1. Найти функции, обратные данным:

а) $y = 2x + 5$; б) $y = x^3 - 2$;

в) $y = \log_2 x$; г) $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{5}$.

Р е ш е н и е.

а) Решаем данное равенство относительно $x = \frac{1}{2} y - \frac{5}{2}$ и заменяем в нем x на y, а y на x.

$$y = \frac{1}{2} x - \frac{5}{2}.$$

б) Аналогично предыдущему имеем

$$x = \sqrt[3]{y+2}, \qquad y = \sqrt[3]{x+2}.$$

в) $x = 2^y$, $y = 2^x$.

г) $x = 5 \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, $y = 5 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

№ 20.2. Найти области определения функций:

а) $y = \operatorname{Arcsin} 5x$; б) $y = \operatorname{Arccos}(2 - x^2)$;

в) $y = \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{3}$.

Решение.

а) Поскольку синус не может принимать значения по модулю больше единицы, поэтому $|5x| \leqslant 1$. Решая это неравенство, получаем $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}$. Следовательно, функция $y = \operatorname{Arcsin} 5x$ определена в промежутке от $-\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{5}$.

б) По той же причине, что и выше, $|2 - x^2| \leqslant 1$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2 - x^2 \leqslant 1, \\ 2 - x^2 \geqslant -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. Это и есть область определения данной функции.

в) Тангенс может принимать все действительные значения от $-\infty$ до ∞. Поэтому областью определения функции $y = \operatorname{Arctg} \frac{x}{3}$ служит вся числовая ось.

№ 20. 3. Найти без таблиц:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;

д) $\operatorname{arctg} 1$; е) $\operatorname{Arctg}(-1)$.

Решение.

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi.$

в) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+k\pi=$

$=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi.$

Если k — четное, т. е. $k=2m$, то

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(-1)^{2m+1}\frac{\pi}{3}+2m\pi=-\frac{\pi}{3}+2m\pi.$$

Если k — нечетное, т. е. $k=2m+1$, то

$$\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(-1)^{2m+2}\frac{\pi}{3}+(2m+1)\pi=\frac{\pi}{3}+(2m+1)\pi.$$

г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

д) $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

е) $\operatorname{Arctg}(-1)=\operatorname{arctg}(-1)+k\pi=-\operatorname{arctg}1+k\pi=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$

№ 20.4. Вычислить без таблиц:

а) $\sin(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arccos 0)$;

б) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos 0\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$;

д) $1-\cos\left(2\arcsin\frac{5}{7}\right)$.

Р е ш е н и е.

а) Поскольку $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arccos 0)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

б) На основании равенства (20.1)

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

в) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos 0\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

г) Выразим сначала $\arcsin x$ через $\operatorname{arctg} x$. Для этого найдем $\operatorname{tg}\arcsin x$.

$$\operatorname{tg}\arcsin x=\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Обращая последнее равенство, получим

$$\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и

$$\arcsin\frac{3}{4}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}}=\frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}\right)=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}}{1-\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}}=\frac{\frac{6}{\sqrt{7}}}{1-\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{6\cdot 7}{\sqrt{7}(-2)}=-3\sqrt{7}.$$

Итак, $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)=-3\sqrt{7}$.

д) Выразим $\arcsin x$ через $\arccos x$. Для этого найдем $\cos\arcsin x$.

$$\cos\arcsin x=\cos\arccos\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}.$$

Откуда находим

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}.$$

В частности,

$$\arcsin\frac{5}{7}=\arccos\sqrt{1-\frac{25}{49}}=\sqrt{\frac{24}{49}}.$$

Тогда

$$1-\cos\left(2\arcsin\frac{5}{7}\right)=1-\cos\left(2\arccos\sqrt{\frac{24}{49}}\right)=$$

$$=1-\cos^2\arccos\sqrt{\frac{24}{49}}+\sin^2\arccos\sqrt{\frac{24}{49}}=$$

$$=1-\cos^2\arccos\sqrt{\frac{24}{49}}+\sin^2\arcsin\frac{5}{7}=$$

$$=1-\frac{24}{49}+\frac{25}{49}=\frac{50}{49}.$$

Это решение довольно громоздкое, и мы его привели, чтобы лишний раз потренироваться в выражении одних функций через другие. Решение этого примера гораздо проще получается на основании тождества

$$1-\cos 2x=2\sin^2 x.$$

$$1-\cos\left(2\arcsin\frac{5}{7}\right)=2\sin^2\arcsin\frac{5}{7}=2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{50}{49}.$$

№ 20.5. Показать справедливость равенств:

а) $\arcsin\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\arcsin\frac{12}{13}=\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$;

г) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

д) $\arcsin 1=3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Р е ш е н и е.

а) Выразим $\operatorname{arctg}x$ через $\arcsin x$. На основании (20.12)

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\arcsin\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}}=\arcsin\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\arcsin\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Выразим $\arcsin x$ через $\operatorname{arcctg} x$.

$$\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Находим далее

$$\arcsin \frac{12}{13} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-\frac{144}{169}}}{\frac{12}{13}} = \operatorname{arcctg} \frac{5}{12}.$$

в) Найдем тангенс разности, стоящей в левой части равенства.

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{1}{4}}{1 + \operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{13}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{13},$$

откуда

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{13}.$$

г) Аналогично предыдущему пример / имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} \operatorname{arctg} y}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} \operatorname{arctg} y} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Обращая последнее равенство, получаем

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

д) Найдем $\sin\left(3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Для этого обозначим $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ через α и выразим $\sin 3\alpha$ через функции аргумента α.

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha.$$

Тогда

$$\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=3\cos^2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\sin^3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Но

$$\cos\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\cos\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а

$$\sin\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\sin\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=1.$$

Итак,

$$\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1,$$

откуда

$$3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\arcsin 1.$$

№ 20.6. Решить уравнения:

а) $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=\frac{\pi}{2}$;

в) $(\arcsin x)^2-5\arcsin x+2=0$.

Р е ш е н и е.

а) На основании формулы, доказанной в № 20.5 (г),

$$\operatorname{arc\,tg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}.$$

Поэтому $\operatorname{arctg}\frac{2}{x^2}=\frac{\pi}{4}$ или $\frac{2}{x^2}=1$. Откуда $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

б) Перепишем уравнение в виде $\arcsin(1-x)=\frac{\pi}{2}+2\arcsin x$ и возьмем синус от обеих его частей.

$$\sin\arcsin(1-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\arcsin x\right).$$

$$1-x=\cos 2\arcsin x.$$

После несложных преобразований получаем уравнение $2x^2 - x = 0$, откуда находим $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Проверкой убеждаемся, что корень $x = \frac{1}{2}$ — посторонний.

в) Это уравнение является квадратным относительно $\arcsin x$. Поэтому, обозначив $\arcsin x = y$ и решив квадратное уравнение $y^2 - 5y + 2 = 0$, получаем

$$\arcsin x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{и} \quad \arcsin x = \frac{5 - \sqrt{17}}{12}.$$

Из этих уравнений находим

$$x_1 = \sin \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \qquad x_2 = \sin \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Смежные стороны параллелограмма $a = 4$ *см*, $b = 8{,}5$ *см*; угол между высотами, проведенными из вершины острого угла, $\alpha = 120°$. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма.

Ответ. 7,37 *см*; 11,06 *см*; 29,4 *см*^{2}.

2. Угол между диагоналями $d_1 = 12{,}5$ *см* и $d_2 = 17{,}6$ *см* четырехугольника равен 30°. Середины сторон четырехугольника последовательно соединены прямыми. Вычислить площадь образовавшегося нового четырехугольника.

Ответ. 27,5 *см*^{2}.

3. В равнобедренной трапеции отношение оснований равно 0,75; средняя линия трапеции равна ее высоте $h = 7$ *м*. Вычислить радиус описанного около трапеции круга.

Ответ. 5 *м*.

4. Периметр параллелограмма $2p = 2{,}6$ *м*, диагонали его $d_1 = 0{,}7$ *м* и $d_2 = 1{,}1$ *м*. Определить его стороны.

Ответ. 0,6 *м* и 0,7 *м*.

5. Найти отношение сторон прямоугольника, площадь которого равна 0,75 площади квадрата, имеющего тот же периметр.

Ответ. 3.

6. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найти углы параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

Ответ. 30° и 150°.

7. Стороны параллелограмма 10 *см* и 20 *см*. Вычислить его площадь, если угол между диагоналями равен 45°.

Ответ. 1,5 *дм*^{2}.

8. Катеты прямоугольного треугольника $a = 6$ *см* и $b = 8$ *см*. Найти расстояние между центрами вписанного и описанного кругов.

Ответ. 2,24 *см*.

9. Прямые, соединяющие середины противоположных сторон

четырехугольника, равны 7 *см* и 11 *см*; одна из его диагоналей равна 12 *см*. Определить другую диагональ.

Ответ. 14 *см*.

10. В точке P гипотенузы c восстановлен к ней перпендикуляр, который пересекает катет a в точке A, а продолжение катета b — в точке B. Доказать, что $PA \cdot PB = m \cdot n$, где m и n — отрезки, на которые делит точка P гипотенузу.

11. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения непараллельных сторон трапеции и через точку пересечения ее диагоналей, делит основания трапеции пополам.

Указание. Через точку пересечения диагоналей провести прямую, параллельную основаниям.

12. Доказать, что если стороны одного треугольника равны медианам другого треугольника, то площади их относятся, как 3 : 4.

13. В равнобедренном прямоугольном треугольнике прямой угол разделен на три равных угла прямыми, делящими гипотенузу на 3 части. Найти эти части, если гипотенуза равна c.

14. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна основанию. Найти углы треугольника и вычислить биссектрису, если боковая сторона треугольника равна a.

Ответ. 36°; 72°; $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

15. Из вершины прямого угла треугольника проведены биссектриса, высота и медиана. Доказать, что биссектриса делит угол между медианой и высотой пополам.

16. В круге радиуса $R = 4$ *см* проведены диаметр и хорда так, что угол между ними равен 30°, причем хорда рассекает диаметр на части, отношение которых равно 3. Определить расстояние хорды от центра, длину хорды и части, на которые хорда делится диаметром.

Ответ. 1 *см*, 7,75 *см*; 5,61 и 2,14 *см*.

17. В круге радиуса $R = 13$ *см* проведены две параллельные хорды $a = 10$ *см* и $b = 24$ *см*. Определить расстояние между ними.

Ответ. 7 *см* и 17 *см*.

18 Доказать, что медиана, проведенная на гипотенузу, равна половине гипотенузы.

19. Вычислить радиус круга, если хорда некоторой дуги его равна a, а хорда дуги вдвое больше равна b.

Ответ. $R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

20. Расстояние между центрами двух кругов $d = 20$ *см*. Найти длину их общей хорды, если диаметры кругов равны 30 *см* и 20 *см*.

Ответ. 14,5 *см*.

21. Внутренние касательные двух неравных кругов пересекаются под углом 120°. Найти расстояние между их центрами, если длина каждой касательной равна $5\sqrt{3}$ *см*.

Ответ. 17,32 *см* или 10 *см*.

22. Три круга касаются внешним образом. Расстояния между их центрами равны 7 *см*, 8 *см* и 9 *см*. Найти их радиусы.

Ответ. 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*.

23. Доказать, что в прямоугольном треугольнике между радиусом r вписанного круга, полупериметром p и гипотенузой c существует зависимость $r = p - c$.

24. Вне треугольника проведена прямая, отстоящая от вершин треугольника на расстоянии $a = 3$ *см*, $b = 5$ *см* и $c = 10$ *см*. На каком расстоянии она находится от центра тяжести треугольника?

Ответ. 6 *см*.

Примечание: центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

25. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 *см*, боковые стороны равны 13 *см* и служат диаметрами двух окружностей. Найти длину их общей хорды.

Ответ. 12 *см*.

26. Около круга радиуса 10 *см* описана равнобочная трапеция. Хорда, соединяющая точки касания боковых сторон равна 16 *см*. Найти площадь трапеции.

Ответ. 500 $см^2$.

27. Два круга касаются внешне; угол между их общими внешней и внутренней касательными равен 60°. Найти отношение их радиусов.

Ответ. 3.

28. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 36°, а боковая сторона a. Определить основание треугольника.

Ответ. $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

29. Вычислить углы вписанной в круг трапеции, диагональ которой стягивает дугу 150°.

Ответ. 75° и 105°.

30. Круг вписан в треугольник с углами 60° и 70°. На какие части окружность делится точками касания?

Ответ. 110°; 120°; 130°.

31. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность; угол при вершине треугольника

равен 50°. На какие части окружность делится сторонами треугольника?

Ответ. 50°; 50°; 80°; 180°.

32. Описанный угол содержит столько угловых градусов, сколько дуговых градусов содержит меньшая из дуг, заключенных между его сторонами. Найти этот угол.

Ответ. 90°.

33. Высота равностороннего треугольника $h = 15$ *см*. Найти радиусы вписанного и описанного кругов.

Ответ. 5 *см*; 10 *см*.

34. Длина окружности увеличена на m единиц длины. На сколько увеличится ее радиус?

Ответ. На $\frac{m}{2\pi}$.

35. В круге радиуса R проведена хорда, стягивающая дугу 60°. На сколько дуга длиннее хорды?

Ответ. На 0,047 R.

36. Две трубы диаметра d_1 и d_2 нужно заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Найти диаметр этой трубы.

Ответ. $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$.

37. Длина окружности $c = 73{,}2$ *см*. Найти диаметр и площадь круга.

Ответ. 23,3 *см*; 426,4 *см*^{2}.

38. Площадь круга $S = 32{,}17$ *см*^{2}. Найти диаметр и длину окружности.

Ответ. 6,4 *см*; 20,1 *см*.

39. Внешний диаметр трубы $d = 14$ *см*, толщина стенок 1,2 *см*. Найти площадь поперечного сечения трубы.

Ответ. 48,26 *см*^{2}.

40. Найти радиус сектора, угол которого равен 18°, если периметр сектора равен 70 *см*.

Ответ. 30,25 *см*.

41. Найти диаметр круга, если его окружность больше диаметра на 642 *см*.

Ответ. 300 *см*.

42. Диаметр круга 50 *м*. Найти диаметр концентрического круга, окружность которого делит площадь данного круга пополам.

Ответ. 35,35 *м*.

43. Две концентрические окружности длиною в 1 *м* и 7 *м* образуют кольцо. Найти длину третьей концентрической окружности, которая делит площадь кольца пополам.

Ответ. 5 *м*.

44. Площадь кольца равна 3,14 $м^2$. Определить длину хорды большего круга, касательной к меньшему.

Ответ. 2 *м*.

45. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4 *см*. Через середины всех его сторон проведена окружность. Вычислить площадь круга.

Ответ. 3,14 $см^2$.

46. Длина дуги $a = 22$ *см*, радиус окружности $R = 28$ *см*. Сколько градусов в дуге?

Ответ. 45°.

47. Три взаимно касающиеся равные окружности радиуса $r = 1$ *см* образуют криволинейный треугольник. Найти его периметр и площадь.

Ответ. π *см*; 0,16 $см^2$.

48. Около круга описана равнобочная трапеция, основания которой $a = 8$ *см* и $b = 2$ *см*. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

Ответ. 1,6.

49. В ромб вписан круг, площадь которого равна S $см^2$. Найти площадь ромба, если острый угол его равен 30°.

Ответ. $\frac{8}{\pi} S$ $см^2 \approx 2{,}55\, S$ $см^2$.

50. На каждой стороне квадрата описан полукруг (снаружи) и около квадрата описан круг. Доказать, что сумма площадей четырех образовавшихся луночек равна площади квадрата.

51. Полуокружность диаметра $d = 2$ *м* разделена на три равные дуги и концы их соединены с одним концом диаметра. На какие части разделился полукруг? Доказать, что площадь средней из них есть среднее арифметическое площадей двух крайних.

52. По данной хорде a и стрелке дуги h определить радиус круга.

Ответ. $r = \frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2}$.

53. Вычислить площадь сегмента, если даны его хорда $a = 12$ *см* и стрелка дуги $h = 3$ *см*.

Ответ. $S = 25{,}2$ $см^2$.

54. К кругу проведены две касательные под углом $\alpha = 60°$ друг к другу. Найти площадь фигуры, заключенной между касательными и меньшей дугой, если известно: 1) радиус круга r; 2) длина касательной a.

Ответ. 1) 0,685 R^2; 2) 0,228 a^2.

55. Центр одного из двух равных кругов лежит на окружности другого. Вычислить площадь их общей части, если радиус их равен R.

Ответ. $\frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

56. Диаметр d круга разделен на две части в отношении $m : n$ и на каждой из них, как на диаметре, построена полуокружность, каждая по разным сторонам от диаметра. Найти длину l получившейся кривой и отношение $\frac{S_1}{S_2}$ образовавшихся частей круга.

Ответ. $l = \frac{\pi d}{2}$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$.

57. Внутри правильного многоугольника взята произвольная точка и из нее опущены перпендикуляры на каждую сторону. Доказать, что сумма этих перпендикуляров равна произведению апофемы на число сторон.

58. Стороны треугольника равны 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*. Определить радиус вписанного круга.

Ответ. $r = 4$ *см*.

59. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), если $AB = 3{,}25$ *дм*, $BC = 5$ *дм*, $CD = 9{,}25$ *дм* и $AD = 15$ *дм*.

Ответ: 30 *дм*^{2}.

Доказать равенство треугольников (60—67), если у них соответственно равны:

60. Высота и два угла, образуемые ею с прилежащими сторонами.

61. Два угла и высота, опущенная из вершины одного из них.

62. Сторона, медиана, проведенная на эту сторону, и угол между ними.

63. Сторона, один из прилежащих к ней углов и высота, опущенная на эту сторону.

64. Сторона и две высоты, опущенные на две остальные стороны.

65. Две стороны и медиана, проведенная к одной из них.

66. Сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

67. Сторона, противолежащий угол и разность сторон, содержащих этот угол.

68. Доказать, что периметр треугольника всегда больше суммы отрезков, соединяющих произвольную точку внутри треугольника с его вершинами, и меньше удвоенной этой суммы.

69. Доказать, что периметр треугольника всегда больше суммы его медиан, но меньше удвоенной этой суммы.

70. Доказать, что если на гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC отложить части $BD = BA$ и $CE = CA$, то $\angle DAE = 45°$.

Выполнить следующие построения (71—104):

71. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, исходящими из его вершины.

72. В данный круг вписать прямоугольник с одной данной стороной a.

73. Внутри круга радиуса R на расстоянии a ($a < R$) от центра взята точка P. Провести через нее хорду, делящуюся в ней пополам и вычислить ее длину.

Ответ. $2\sqrt{R^2 - a^2}$.

74. Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B так, чтобы угол между радиусом круга и хордой AB был равен 30°.

75. В данный угол α вписать круг данного радиуса R, касающийся сторон угла.

76. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности в данной ее точке.

77. Данным радиусом описать окружность так, чтобы она отсекала от сторон данного угла хорды данной длины. Рассмотреть отдельно случай, когда хорды равны.

78. Дан круг и вне его точка. Через нее провести к кругу секущую так, чтобы внутренняя часть ее равнялась данному отрезку.

79. На данной прямой найти точку, равноотстоящую от двух данных точек.

80. На стороне треугольника или ее продолжении найти точку, равноотстоящую от концов какой-либо из двух других сторон.

81. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и одному из острых углов.

82. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и медиане, проведенной на данную сторону.

83. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и медиане, проведенной из вершины другого прилежащего к данной стороне угла.

84. Построить прямоугольный треугольник по одному из отрезков гипотенузы, на которые делит гипотенузу перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла, и прилежащему к нему катету.

85. Построить равнобедренный треугольник по основанию и высоте, опущенной на боковую сторону.

86. Построить треугольник по основанию, высоте и медиане, проведенной на основание.

87. Построить равнобедренный треугольник по высоте и периметру.

88. Построить равнобедренный треугольник по высоте и разности между суммой равных сторон и основания.

89. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между данными параллельными прямыми, равнялся данному отрезку.

90. Найти точку между двумя непараллельными прямыми, которая находилась бы на данных расстояниях от этих прямых.

91. Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на основание.

92. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

93. Построить равнобедренный треугольник, вершина которого находилась бы в данной точке, концы основания лежали бы на двух данных параллельных прямых и основание составляло бы с одной из них данный угол.

94. Построить параллелограмм по одной диагонали и неравным сторонам его.

95. Построить параллелограмм по одной из сторон и диагоналям.

96. Построить параллелограмм по диагоналям и высоте.

97. Построить параллелограмм по диагоналям и перпендикуляру, опущенному из вершины параллелограмма на одну из диагоналей.

98. Построить ромб по стороне и углу между этой стороной и диагональю.

99. Построить ромб по высоте и стороне.

100. Построить трапецию, если известны три стороны и угол между двумя из них.

101. Построить ромб по высоте и диагонали.

102. Построить трапецию, если известны две смежные стороны и диагонали.

103. Построить трапецию по данной разности параллельных сторон, обеим непараллельным сторонам и диагонали.

104. В данный треугольник вписать ромб, который имел бы один общий угол с треугольником.

105. Если опустить перпендикуляры из концов диаметра на какую-либо хорду или ее продолжение, то расстояние оснований этих перпендикуляров до соответствующих концов хорды равны. Доказать.

106. Доказать, что хорда, соединяющая точки касания двух касательных, проведенных к окружности из одной точки, пер-

пендикулярна к прямой, соединяющей данную точку с центром круга.

107. Доказать, что если на радиусе данного круга, как на диаметре, построить окружность и из общей точки провести хорду большего круга, то она будет делиться пополам меньшей окружностью.

108. H — точка пересечения высот треугольника ABC, AD — его высота. Продолжим AD до пересечения в точке G с окружностью, описанной около данного треугольника. Показать, что $DG = DH$.

109. В круг вписан равносторонний треугольник. Доказать, что хорда, соединяющая середины дуг, отсекаемых двумя сторонами треугольника, делится этими сторонами на три равные части.

110. Доказать, что центры кругов, вписанного и описанного вокруг правильного треугольника, совпадают и диаметр одного вдвое больше диаметра другого.

111. Доказать, что биссектриса угла треугольника пересекает окружность, описанную вокруг него в точке, равноотстоящей от концов противоположной этому углу стороны и центра вписанного круга.

112. Около правильного треугольника ABC описана окружность и на дуге BC выбрана произвольная точка M. Доказать, что $MA = MB + MC$.

113. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

114. Стороны треугольника равны 12, 14 и 16. Из его вершин, как из центра, описаны окружности так, что каждая из них касается двух других. Определить радиусы окружностей.

Ответ. 5, 7 и 9.

115. Из точки A, взятой вне круга, проведены к нему касательные AB и AC. К меньшей дуге BC проведена касательная, которая пересекает AB и AC в точках D и E. Определить периметр треугольника ADE, если $AB = 6{,}8$ *см*.

Ответ. 13,6 *см*.

116. В окружность вписан прямоугольник, у которого одна из сторон равна 24 *см*, а угол между этой стороной и диагональю равен 60°. Определить радиус окружности.

Ответ. 24 *см*.

117. Доказать, что прямая, соединяющая основание двух высот треугольника, отсекает треугольник, подобный данному.

118. Если в треугольниках, имеющих общее основание и равные высоты, провести прямую, параллельную основанию, то отрезки этой прямой, заключенные в треугольниках, будут равны. Доказать.

119. В треугольнике ABC из точки P, взятой на BC, проведены прямые PQ и PR, параллельные CA и BA. Доказать, что $PQ \times PR = BQ \cdot CR$.

120. В равностороннем треугольнике ABC из середины D стороны BC опущен перпендикуляр DE на AB. Показать, что $AE = \frac{3}{4} AB$.

121. Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине треугольника пересекает продолжение основания в точке, расстояние которой до концов основания пропорциональны двум другим сторонам.

122. Доказать, что треугольники подобны, если они имеют по равному углу при основании, а основание и высота одного из них пропорциональна основанию и высоте другого.

123. Треугольники подобны, если они имеют по одному равному углу, а высоты, опущенные на стороны этого угла, пропорциональны. Доказать.

124. Треугольники подобны, если две стороны и медиана одного треугольника пропорциональны соответствующим элементам другого. Доказать.

125. Треугольники подобны, если медианы одного треугольника пропорциональны соответствующим медианам другого треугольника. Доказать.

126. Если AA', BB', CC' — биссектрисы углов треугольника ABC, то

$$AA' \cdot BB' \cdot CC' = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

где a, b, c — стороны треугольника. Доказать.

127. Показать, что в прямоугольном треугольнике выполняется соотношение $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b_2}$, где a, b — катеты, h — длина перпендикуляра, опущенного на гипотенузу.

128. Показать, что в равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC и одной из равных высот BD

$$AC \cdot CD = \frac{1}{2} BC^2.$$

129. В равнобедренном треугольнике ABC проведена прямая DE параллельно основанию. Показать, что

$$BE^2 = CE^2 + BC \cdot DE.$$

130. BD и CE — высоты треугольника ABC. Показать, что

$$BC^2 = AB \cdot BE + AC \cdot CD.$$

131. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов непараллельных сторон плюс удвоенное произведение оснований.

132. Доказать, что во всяком четырехугольнике сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

133. Если на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, как на сторонах, построить квадраты и соединить отрезками прямых смежные вершины квадратов, то получится шестиугольник. Показать, что сумма квадратов сторон шестиугольника в восемь раз больше квадрата гипотенузы.

134. Если через точку касания кругов провести прямую, пересекающую окружности обоих кругов, то отрезки этой прямой, заключенные внутри кругов, будут пропорциональны радиусам. Доказать.

135. Доказать, что если на диаметре круга взять две точки, равноудаленные от центра, то сумма квадратов расстояний каждой точки окружности до этих двух точек постоянна.

136. Одна из сторон треугольника разделена в отношении 2 : 3, и через точку деления проведена прямая длиной 2,4 *см* параллельно другой стороне до пересечения с третьей стороной. Определить длину той стороны треугольника, параллельно которой проведена прямая.

Ответ. 6 *см*.

137. Неравные стороны параллелограмма равны 4 *см* и 5 *см*. Расстояние между сторонами в 4 *см* равно 4 *см*. Определить расстояние между двумя другими сторонами.

Ответ. 3,2 *см*.

138. Определить стороны параллелограмма, если его периметр равен $2p$, а высоты h и h_1.

Ответ. $\frac{ph_1}{h+h_1}$; $\frac{ph}{h+h_1}$.

139. Отрезки гипотенузы прямоугольного треугольника, на которые делит гипотенузу высота, опущенная из вершины прямого угла, находятся в соотношении 2 : 3. Катет, прилегающий к мень-

шему отрезку, равен 4 *см*. Определить другой катет и гипотенузу.

Ответ. $\sqrt{24}$ и $\sqrt{40}$.

140. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен 3 *см*. Один из отрезков гипотенузы, на которые делит гипотенузу основание перпендикуляра, равен 2 *см*. Определить катеты.

Ответ. $\sqrt{13}$ и $\sqrt{29{,}25}$.

141. Основание равнобедренного треугольника равняется 10 *см*. Из точки, взятой на основании и отстоящей от одного из концов на 3 *см*, опущен на ближайшую сторону перпендикуляр длиною $\frac{15}{7}$ *см*. Определить высоту треугольника.

Ответ. $\frac{25}{12}\sqrt{6}$ *см*.

142. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна a, гипотенуза равна b. Определить катеты.

Ответ. $\frac{1}{2}(a+\sqrt{2b^2-a^2})$ и $\frac{1}{2}(a-\sqrt{2b^2-a^2})$.

143. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$, высота — h. Определить стороны.

Ответ. $\frac{p^2+h^2}{2p}$, $\frac{p^2-h^2}{p}$.

144. Определить высоту треугольника ABC, опущенную из вершины угла A, если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Ответ. $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $2p = a+b+c$.

145. По сторонам трапеции a, b, c и d, где b и d — основания и $b > d$, определить диагонали.

Ответ. $\sqrt{\frac{d(b^2-c^2)-b(a^2+d^2)}{b-d}}$ и $\sqrt{\frac{d(b^2-a^2)-b(c^2+d^2)}{b-d}}$.

146. Периметры подобных равнобедренных треугольников равны $2p$ и $2p'$. Основание одного треугольника на a больше основания другого. Определить стороны треугольников.

Ответ. Основания равны $\frac{ap}{p-p'}$ и $\frac{ap'}{p-p'}$.

147. В круге радиуса r проведена хорда. Через один из ее концов проведен диаметр, а из другого конца опущен на диаметр перпендикуляр. Отрезок диаметра, на который делит его основание перпендикуляра, прилежащий к хорде, равен b. Определить длину хорды.

Ответ. $\sqrt{2br}$.

148. Расстояние между центрами двух кругов радиусов r и R равно a. Определить расстояние центра меньшего круга до точки пересечения их общей касательной с линией центров.

Ответ. $\frac{ar}{R-r}$ или $\frac{ar}{R+r}$.

149. По данным радиусам R и r двух пересекающихся кругов и общей их хорде a определить длину отрезка, соединяющего центры кругов.

Ответ. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$.

150. Определить длину общей хорды двух пересекающихся кругов радиусов R и r, если расстояние между их центрами равно a.

Ответ. $\frac{1}{a}\sqrt{(R+r+a)(R+r-a)(R+a-r)(r+a-R)}$.

151. Диагонали, проведенные из вершины правильного пятиугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Доказать.

152. Доказать, что равноугольный многоугольник, описанный около круга, правильный.

153. Высота равностороннего треугольника равна стороне правильного треугольника, вписанного в круг, диаметр которого равен стороне данного треугольника. Доказать.

154. Доказать, что между периметрами p вписанного и P описанного многоугольников с одинаковым числом сторон и периметрами p' вписанного и P' описанного многоугольников с удвоенным числом сторон существуют зависимости

$$P'=\frac{2Pp}{P+p} \quad \text{и} \quad p'=\sqrt{P'p}.$$

155. Пусть m означает отношение периметров вписанного и описанного правильных многоугольников с одинаковым числом сторон, а m' — отношение периметров вписанного и описанного правильных многоугольников с удвоенным числом сторон. Показать, что

$$m'=\sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

В задачах 156—176 r означает радиус круга, a_n и α_n — сторону и апофему правильного вписанного в этот круг n-угольника, b_n — сторона правильного описанного n-угольника.

156. Дано r. Найти a_{10}.

Ответ. $\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$.

157. Дано r. Найти a_8.

Ответ. $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

158. Дано r. Найти a_{20}.

Ответ. $r\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

159. Дано r. Найти b_{10}.

Ответ. $\frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.

160. Дано r. Найти b_8.

Ответ. $2r(\sqrt{2}-1)$.

161. Дано r. Найти α_3.

Ответ. $\frac{r}{2}$.

162. Дано r. Найти α_6.

Ответ. $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

163. Дано r. Найти α_5.

Ответ. $\frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

164. Дано a_{10}. Найти r.

Ответ. $\frac{a_{10}}{2}(\sqrt{5}+1)$.

165. Дано a_5. Найти r.

Ответ. $a_5\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

166. Дано b_{10}. Найти r.

Ответ. $\frac{1}{2}b_{10}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

167. Дано b_8. Найти r.

Ответ. $\frac{1}{2}b_8(\sqrt{2}+1)$.

168. Дано α_{10}. Найти r.

Ответ. $\alpha_{10}\sqrt{2-\sqrt{0{,}8}}$.

169. Дано a_4. Найти a_3.

Ответ. $a_4\sqrt{1{,}5}$.

170. Дано a_4. Найти b_3.

Ответ. $a_4\sqrt{6}$.

171. Дано a_4. Найти a_8.

Ответ. $a_4\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

172. Дано a_8. Найти a_4.

Ответ. $a_8\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

173. Дано b_3. Найти b_6.

Ответ. $\frac{1}{3}\,b_3$.

174. Дано a_5. Найти a_{10}.

Ответ. $a_5\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

175. Дано a_{10}. Найти a_5.

Ответ. $a_{10}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

176. Дано a_5. Найти b_{10}.

Ответ. $a_5\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{5}}$.

177. Определить сторону правильного пятнадцатиугольника, вписанного в круг радиуса r.

Ответ. $\frac{1}{4}r(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})$.

178. Определить диагональ правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса r.

Ответ. $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

179. Высота треугольника на k больше основания. Если основание и высоту увеличить на l, то площадь треугольника увеличится на S. Найти основание.

Ответ. $\frac{2S-kl-l^2}{2l}$.

180. Два треугольника имеют по равному углу. Стороны, заключающие эти углы, равны в одном треугольнике a и b, в другом — a_1 и b_1. Определить площадь второго треугольника, если площадь первого равна S.

Ответ. $\frac{Sa_1b_1}{ab}$.

181. Определить площадь равнобедренного треугольника по периметру $2p$ и высоте h.

Ответ. $\frac{(p^2-h^2)\,h}{2p}$.

182. Определить площадь равнобедренного треугольника по двум его высотам h и h_1.

Ответ. $\dfrac{hh_1^2}{\sqrt{4h_1^2 - h^2}}$.

183. Определить площадь равностороннего треугольника по разности d между стороной и высотой.

Ответ. $d^2\,(7\sqrt{3} + 12)$.

184. Определить площадь треугольника по периметру $2p$, стороне a и высоте h, соответствующей одной из других сторон.

Ответ. $\dfrac{ph\,(p - a)}{2p - a - \sqrt{a^2 - h^2}}$.

185. Определить площади правильных пяти-, шести- и восьмиугольника, вписанных в круг радиуса r.

Ответ. $\frac{5}{8}\,r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; $\quad\frac{3}{2}\,r^2\sqrt{3}$; $\quad 2r^2\sqrt{2}$.

186. Определить площади правильных пяти,- шести- и восьмиугольника, описанных около круга радиуса R.

Ответ. $5R^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$; $2R^2\sqrt{3}$; $8R^2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

187. По известной стороне a правильных пяти-, шести-, восьмиугольников определить их площадь.

Ответ. $\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$; $\quad\frac{3}{2}\,a^2\sqrt{3}$; $\quad 2a^2\,(1 + \sqrt{2})$.

188. По известной площади S правильного многоугольника определить его сторону. Рассмотреть случаи шести-, восьми- и двенадцатиугольника.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{2S}{3\sqrt{3}}}$; $\quad\sqrt{S\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)}$; $\quad\sqrt{\frac{S}{3}\,(2 - \sqrt{3})}$.

189. По известной площади S правильного многоугольника определить радиус описанного круга. Рассмотреть случаи восьми- и десятиугольника.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{2S}{5}\sqrt{2\,(\sqrt{5} - 1)}}$; $\quad\sqrt{\dfrac{S}{5}\sqrt{2\,(\sqrt{5} + 1)}}$.

190. Найти отношение площадей правильных треугольников вписанных и описанных около круга радиуса r.

Ответ. 1 : 4.

191. Основания трапеции относятся как $p : q$. Разность их равна d. Определить площадь трапеции, если углы при основании трапеции равны α и β.

Ответ. $S = \frac{d^2}{2} \cdot \frac{p+q}{p-q} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

192. Концы диаметра удалены от касательной на расстояние m и n. Угол наклона касательной к диаметру равен α. Определить длину диаметра.

Ответ. $\frac{m-n}{\sin\alpha}$.

193. В круге радиуса r по одну сторону от центра проведены две параллельные хорды, стягивающие дуги α и β ($\alpha > \beta$), и концы их соединены. Определить площадь полученной трапеции.

Ответ. $S = 2r^2 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \sin^2\frac{\alpha+\beta}{4}$.

194. Через концы хорды, делящей окружность радиуса r в отношении $m : n$ ($m < n$), проведены касательные. Определить площадь треугольника, образованного хордой и касательными.

Ответ. $S = r^2 \sin^2\frac{m\pi}{m+n} \operatorname{tg}\frac{m\pi}{m+n}$.

195. Треугольник ABC — равнобедренный. Радиус $OA = r$ описанного круга образует с основанием AC угол $OAC = \alpha$. Определить площадь треугольника ABC.

Ответ. $S = 2r^2 \cos\alpha \sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$.

196. Сектор, дуга которого содержит 60°, равновелик кругу радиуса r. Определить радиус сектора.

Ответ. $r\sqrt{6}$.

197. По данному радиусу r, дуге α и соответствующей хорде c определить площадь сегмента, заключенного между данной дугой и хордой.

Ответ. $\frac{2\alpha r - c\sqrt{4r^2 - c^2}}{4}$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

198. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из концов диагонали параллелограмма на плоскость, проходящую через другую его диагональ, равны между собой.

199. Доказать, что всякая точка, лежащая на плоскости, делящей двугранный угол пополам, находится на одинаковых расстояниях от граней этого угла.

200. Доказать, что через прямую, не перпендикулярную к плоскости, можно провести только одну плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

201. Точки A и B находятся на расстоянии a и b от плоскости M. Найти расстояние до плоскости M точки C, делящей отрезок AB в отношении $m : n$.

Ответ. $\dfrac{an + bm}{m + n}$.

202. Из точки, отстоящей от плоскости на h, проведены к этой плоскости две наклонные, длины которых относятся как m к n. Вычислить длины этих наклонных, если известно, что первая из них составляет с плоскостью угол, вдвое больший угла, который составляет с плоскостью другая наклонная.

Ответ. $\dfrac{2hm}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$; $\dfrac{2hm^2}{n\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

203. Даны две параллельные прямые AB и CD, расстояние между которыми равно a. Точка O отстоит от AB на b и от CD на c. Определить расстояние от точки O до плоскости $ABCD$.

Ответ. $\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $2p = a + b + c$.

204. Плоскости M и N, пересекающиеся по прямой PQ, составляют угол в 45°. На прямой PQ возьмем две точки A и B. На плоскости M возьмем третью точку C и из нее опустим перпендикуляр CD на плоскость N. Найти отношение площадей треугольников ABC и ABD.

Ответ. $\sqrt{2}$.

205. В кубе через концы его ребер, исходящих из одной вершины, проведено сечение. Вычислить углы и площадь сечения, если ребро куба a.

Ответ. 60°; $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

206. В центре O квадрата $ABCD$ восстановлен перпендикуляр $OM = h$ к плоскости квадрата. Найти расстояние точки M от вершин и сторон квадрата, если сторона квадрата a.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2a^2}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$.

207. В середине гипотенузы прямоугольного треугольника к плоскости его восстановлен перпендикуляр h. Найти расстояние его конца от катетов a и b.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}$.

208. Дана плоскость P и вне ее точка M. Из точки M проведены две наклонные $MA = MB = a$, угол между которыми равен 60°, а угол между их проекциями — 90°. Найти расстояние точки до плоскости.

Ответ. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

209. В центре равностороннего треугольника со стороною a к его плоскости восстановлен перпендикуляр, длина которого h. Найти расстояние конца перпендикуляра от вершины треугольника.

Ответ. $\frac{1}{3}\sqrt{9h^2 + 3a^2}$.

210. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*, а двугранные углы при основании равны каждый 60°. Определить боковую поверхность пирамиды.

Ответ. 168 $см^2$.

211. Прямоугольный треугольник расположен так, что гипотенуза его лежит в плоскости P, а катеты образуют с плоскостью P углы α и β. Определить угол между плоскостью треугольника и плоскостью P.

Ответ. $\sin x = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

212. Отрезок $AB = a = 8$ *см* параллелен плоскости и отстоит от нее на расстоянии $h = 4$ *см*. Из концов его перпендикулярно к нему проведены две прямые $AM = BN = b = 5$ *см* по разные стороны AB до пересечения с плоскостью P в точках M и N. Определить отрезок MN.

Ответ. 10 *см*.

213. В прямом двугранном угле (внутри его) дана точка M, расстояния которой от граней угла равны a и b. Найти расстояние точки M от ребра.

Ответ. $\sqrt{a^2 + b^2}$.

214. Дан треугольник ABC со сторонами $a = 6$ *см*, $b = 10{,}2$ *см* и $c = 12{,}6$ *см*. В вершине C к плоскости ABC восстановлен перпендикуляр $CD = h = 9$ *см*. Найти расстояние точки D от стороны AB.

Ответ. 10,2 *см*.

215. Дана точка A вне плоскости P; из нее к плоскости P проведены две наклонные AB и AC так, что угол между AB и плоскостью P равен α и угол между AC и P равен $\beta = 2\alpha$. Определить длину большей наклонной, если длина меньшей a.

Ответ. $2a\cos\alpha$.

216. Из точки A, лежащей внутри двугранного угла, опущены перпендикуляры на каждую грань угла; угол между перпендикулярами $\alpha = 60°$. Найти расстояние точки A от ребра, если она отстоит на 12 *см* от каждой грани угла.

Ответ. 13,86 *см*.

217. В прямой треугольной призме площадь основания $Q = 12\sqrt{3}$ *м*^{2}; через одну из вершин основания параллельно противоположной стороне основания проведена плоскость, наклоненная к основанию под углом $\alpha = 30°$. Найти площадь сечения.

Ответ. 24 *м*^{2}.

218. Отрезок AB опирается своими концами в грани прямого двугранного угла; проекции его на грани 15 *см* и 16 *см*, а проекции на ребро двугранного угла 9 *см*. Найти его длину.

Ответ. 20 *см*.

219. Отрезок $AB = a$ параллелен плоскости P. Из концов его восстановлены к нему два перпендикуляра, образующие с плоскостью P углы α и β ($\alpha > \beta$); расстояние между точками пересечения этих перпендикуляров с плоскостью P равно b. Найти расстояние отрезка AB от плоскости P. Рассмотреть два случая и вычислить полученный в общем виде результат, полагая $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $a = 12$ *см* и $b = 13$ *см*.

Ответ. $\sqrt{b^2 - a^2}\,\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ или $\sqrt{b^2 - a^2}\,\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

220. Два конуса имеют общую вершину и общую высоту. Диаметр одного вдвое больше диаметра другого. Определить угол между образующей большего конуса и основанием, если образующая меньшего конуса наклонена к основанию под углом α.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

221. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна Q. Высота боковой грани — a. Найти угол φ между боковой гранью и основанием.

Ответ. $\sin 2\varphi = \dfrac{Q\sqrt{2}}{a^2}$.

222. В правильной четырехугольной пирамиде отношение ее высоты к стороне основания равно k. Через диагональ основания проведена плоскость под углом x к основанию так, что площадь полученного сечения равна площади диагонального сечения. Определить x.

Ответ. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{(1 - k\sqrt{2})^2}{1 - 2k^2}$.

223. Если две пирамиды имеют общее основание, а вершины лежат по разным сторонам этого основания, то прямая, соединяющая их вершины, делится плоскостью основания в отношении объемов пирамид. Доказать.

224. Если усеченную пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основаниям в равном расстоянии от них, то площадь сечения равна полусумме среднего арифметического и среднего геометрического площадей обоих оснований. Доказать.

В задачах **225—226** a означает ребро куба, d — его диагональ, S — площадь диагональной плоскости, S' — полную поверхность и V — его объем.

225. Дано: S; найти: a, d, S' и V.

Ответ. $a=\sqrt{\frac{S}{\sqrt{2}}}$; $d=\sqrt{\frac{3}{2}S\sqrt{2}}$;

$$S'=3S\sqrt{2};\quad V=\frac{S}{2}\sqrt{S\sqrt{2}}.$$

226. Дано: S'; найти: a, d, S и V.

Ответ. $a=\sqrt{\frac{S'}{6}}$; $d=\sqrt{\frac{S'}{2}}$;

$$S=\frac{S'}{6}\sqrt{2};\quad V=\frac{S'}{6}\sqrt{\frac{S'}{6}}.$$

В задачах **227—234** h означает высоту прямоугольного параллелепипеда, B — площадь его основания, S — боковую поверхность, S' — полную поверхность и V — его объем.

В задачах **227—229** основание прямоугольного параллелепипеда есть квадрат, у которого сторона равна a.

227. Дано: h и S; найти: a, d и V.

Ответ. $a=\frac{S}{4h}$; $d=\sqrt{\frac{S^2}{8h^2}+h^2}$; $V=\frac{S^2}{16h}$.

228. Дано: S и S'; найти: a, h и V.

Ответ. $a=\sqrt{\frac{S'-S}{2}}$; $h=\frac{S}{2\sqrt{2(S'-S)}}$; $V=\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S'-S}{2}}$.

229. Дано: S и V; найти: a, h и S'.

Ответ. $a=\frac{4V}{S}$; $h=\frac{S^2}{16V}$; $S'=S+\frac{32V^2}{S^2}$.

В задачах **230—234** основание прямоугольного параллелепипеда есть прямоугольник, стороны которого равны a и b.

230. Дано: a, h и V; найти b и S.

Ответ. $b=\frac{V}{ah}$; $S=2\left(ah+\frac{V}{a}+\frac{V}{h}\right)$.

231. Дано: h, B и S; найти a, b и V.

Ответ. $a = b = \frac{S}{4h} \pm \sqrt{\frac{S^2}{16h^2} - B}$; $V = Bh$.

232. Дано: h, S и V; найти a и b.

Ответ. $a = b = \frac{S}{4h} \pm \sqrt{\frac{S^2}{16h^2} - \frac{V}{h}}$.

233. Дано: a, S' и V; найти b и h.

Ответ. $b = h = \frac{S'a - 2V \pm \sqrt{(S'a - 2V)^2 - 16a^3V}}{4a^2}$.

234. Дано: S, S' и V; найти a, b и h.

Ответ. $a = b = \frac{S(S' - S)}{8V} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S^2(S' - S)^2}{16V^2} - 2(S' - S)}$;

$$h = \frac{2V}{S' - S}.$$

В задачах **235**—**244** h означает высоту прямой призмы, B — площадь ее основания, S, S' и V — боковую поверхность, полную поверхность и объем прямой призмы.

В задачах **235**—**238** основание прямой призмы есть равносторонний треугольник, у которого сторона равна a.

235. Дано: h и S'; найти a и V.

Ответ. $a = \sqrt{3h^2 + \frac{2S'}{3}\sqrt{3}} - h\sqrt{3}$;

$$V = \frac{h\sqrt{3}}{4}\left\{\sqrt{3h^2 + \frac{2S'}{3}\sqrt{3}} - h\sqrt{3}\right\}^2.$$

236. Дано: h и V; найти: a, B и S.

Ответ. $a = \sqrt{\frac{4V}{h\sqrt{3}}}$; $B = \frac{V}{h}$; $S = 2\sqrt{3Vh\sqrt{3}}$.

237. Дано: S и S'; найти: a, h и V.

Ответ. $a = \sqrt{\frac{2(S' - S)\sqrt{3}}{3}}$; $h = \frac{S}{\sqrt{6(S' - S)\sqrt{3}}}$;

$$V = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{S' - S}{6\sqrt{3}}}.$$

238. Дано: S и V; найти: a, h и S'.

Ответ. $a = \frac{4V\sqrt{3}}{S}$; $h = \frac{S^2\sqrt{3}}{36V}$; $S = S' + \frac{24V^2\sqrt{3}}{S^2}$.

В задачах 239—241 основание прямой призмы есть равнобедренный треугольник, у которого основание b, а другая сторона c.

239. Дано: c, S и S'; найти: b и V.

Ответ. $b = \sqrt{c^2 + S' - S} \pm \sqrt{c^2 + S - S'}$; $V = \dfrac{S(S' - S)}{2(2c + b)}$.

240. Дано: b, S и V; найти: c и h.

Ответ. $c = \dfrac{b(S^2b^2 + 16V^2)}{2(S^2b^2 - 16V^2)}$; $h = \dfrac{S^2b^2 - 16V^2}{2Sb^3}$.

241. Дано: c, h и V, найти: b и S.

Ответ. $b = \sqrt{c^2 + \dfrac{2V}{h}} \pm \sqrt{c^2 - \dfrac{2V}{h}}$; $S = (2c + b)h$.

В задачах 240—242 основание прямой треугольной призмы есть треугольник, у которого стороны равны a, b и c.

242. Дано: a, b, h и S; найти c и V.

Ответ. $c = \dfrac{S}{h} - (a + b)$; $V = Sh$.

243. Дано: a, h, S и S'; найти: b и c.

Ответ. $b + c = \dfrac{S}{h} - a$; $b - c = \sqrt{a^2 - \dfrac{4(S' - S)^2 h^2}{S(S - 2ah)}}$.

244. Дано: a, h, S и V; найти: b и c.

Ответ. $b + c = \dfrac{S}{h} - a$; $b - c = \sqrt{a^2 - \dfrac{16V^2}{S(S - 2ah)}}$.

245. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол β. Определить сторону основания пирамиды.

Ответ. $\sqrt{3}\, b \cos \beta$.

246. В правильной четырехугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром равен α; сторона основания пирамиды равна a. Определить длину боковых ребер пирамиды.

Ответ. $\dfrac{a}{\sqrt{2} \sin \alpha}$.

247. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Из вершины пирамиды любой диаметр вписанного в треугольник круга виден под углом β. Определить расстояние вершины пирамиды от сторон треугольника основания.

Ответ. $\dfrac{b \sin \alpha}{4 \sin \dfrac{\beta}{2} \sin^2 \left(45° + \dfrac{\alpha}{4}\right)}$.

248. В правильной четырехугольной пирамиде проведена плоскость через диагональ основания параллельно боковому ребру. Сторона основания равна a; боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Определить площадь полученного сечения.

Ответ. $\frac{a^2}{4\cos\alpha}$.

249. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно b и наклонено к плоскости основания под углом α. Проведено плоскость через середины ребер AB и BC параллельно ребру SB. Определить площадь полученного сечения.

Ответ. $\frac{b^2\sqrt{3}\cos\alpha}{4}$.

250. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и наклонено под углом β к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и середину высоты проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения.

Ответ. $\frac{5}{8}b^2\cos\alpha$.

251. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной b и основанием $BC = a$. Через сторону BC проведена плоскость под углом α к плоскости основания пирамиды, пересекающая противоположное боковое ребро в точке D. Определить площадь Q полученного сечения и отрезок AD бокового ребра.

Ответ. $Q = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4\cos\alpha}$; $CD = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}\operatorname{tg}\alpha$.

252. В правильной n-угольной пирамиде площадь основания равна Q, а двугранные углы, которые образуют боковые грани с плоскостью основания, равны φ. Определить боковую и полную поверхность пирамиды.

Ответ. $S_{бок} = \frac{Q}{\cos\varphi}$; $S_{полн} = \frac{2Q\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

253. В правильной n-угольной пирамиде площадь основания равна Q, а высота составляет с каждой из боковых граней угол ψ. Определить боковую и полную поверхность пирамиды.

Ответ. $S_{бок} = \frac{\pi}{\sin\psi}$; $S_{полн} = \frac{2Q^2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\psi}$.

254. Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания одну n-ю

часть ($n > 2$). Высота конуса равна H. Определить площадь сечения.

Ответ. $\dfrac{H^2 \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\sin\varphi}$.

255. В усеченной правильной n-угольной пирамиде площади оснований равны Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$), а внутренние двугранные углы, которые образуют боковые грани с плоскостью большого основания, равны φ. Определить боковую поверхность пирамиды.

Ответ. $S_{\text{бок}} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{\cos\varphi}$.

256. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Определить угол между противоположными боковыми ребрами.

Ответ. $2\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

257. В прямой треугольной призме через одну из сторон основания проведена плоскость пересекающая противоположное боковое ребро и отклоненная от плоскости основания на угол α. Площадь основания равна Q. Определить площадь сечения.

Ответ. $\dfrac{Q}{\cos\alpha}$.

258. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a; длина бокового ребра равна b; одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы α. Определить боковую поверхность этой призмы.

Ответ. $4ab\sin\left(15^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

259. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине равны α, β, γ. Боковые ребра равны l. Определить боковую поверхность пирамиды.

Ответ. $S_{\text{бок}} = \dfrac{l^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

260. Около шара радиуса R описан конус с углом α при вершине в осевом сечении конуса. Определить объем и полную поверхность конуса.

Ответ. $V = \dfrac{\pi}{3} R^3 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{4}\right)$;

$$S = \frac{2\pi R^2 \sin^2\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

261. В правильную n-угольную пирамиду, у которой высота равна H и двугранный угол при основании равен β, вписан шар. Определить его радиус.

Ответ. $\dfrac{H\cos\beta}{2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$.

262. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен β. Определить объем пирамиды.

Ответ. $V=\dfrac{2nR^3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{3\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}\cos\beta}$.

263. Равнобедренный треугольник с углом β при основании вращается около высоты, опущенной на основание. Из центра основания полученного конуса описана сферическая поверхность, касающаяся боковой поверхности конуса. Определить, в каком отношении окружность касания делит коническую и сферическую поверхности.

Ответ. Для конуса: $\operatorname{ctg}^2\beta\,(2+\operatorname{ctg}^2\beta)$; для шара: $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}$.

264. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна Q; две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углами α и β. Найти объем этой пирамиды.

Ответ. $V=\dfrac{Q}{3}\sqrt{Q\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

265. Прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α вращается около второго катета. Определить объем и поверхность полученного тела вращения.

Ответ. $V=\dfrac{\pi}{3}a^3\operatorname{ctg}\alpha$; $S=2\pi a^2\dfrac{\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

266. Прямоугольный треугольник с острым углом α и высотою h, опущенной на гипотенузу, вращается около прямой, проходящей через вершину прямого угла треугольника параллельно его гипотенузе. Определить объем тела вращения.

Ответ. $V=\dfrac{4\pi h^3}{3\sin 2\alpha}$.

267. В конус с образующей l, наклоненной к плоскости основания под углом β, вписан шар, а в него вписан куб. Определить поверхность куба.

Ответ. $8l\cos\beta\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

268. Круговой сектор радиуса R с дугой, величина которой равна α, вращается около диаметра перпендикулярного к оси симметрии сектора. Определить объем и кривую поверхность полученного тела вращения.

Ответ. $V = \frac{4\pi R^3}{3} \sin\frac{\alpha}{2}$; $S = 4\pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

269. Круговой сектор с углом α (в радианной мере) и площадью Q вращается около среднего радиуса. Определить поверхность полученного тела вращения.

Ответ. $\frac{4\pi Q}{\alpha} \sin\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right)$ или $\frac{8\pi Q \sin\frac{\alpha}{4} \sin\left(\frac{\alpha}{4} + \varphi\right)}{\alpha \cos\varphi}$,

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

270. Осевое сечение прямого цилиндра представляет прямоугольник, в котором диагональ, равная d, составляет с высотой прямоугольника угол α. В этот цилиндр вписан конус так, что основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром другого основания цилиндра. Определить объем конуса.

Ответ. $V = \frac{1}{24\pi} d^3 \sin\alpha \sin 2\alpha$.

271. Прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α, вращается около указанного катета. Определить объем и поверхность полученного тела вращения.

Ответ. $V = \frac{\pi}{3} a^3 \operatorname{ctg}^2\alpha$; $S = \pi a^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

272. Треугольник с углом α, заключенным между сторонами a и b, вращается около стороны a. Определить объем тела вращения.

Ответ. $V = \frac{\pi}{3} ab^2 \sin^2\alpha$.

273. Прямоугольный треугольник с острым углом α и высотой h, опущенной на гипотенузу, вращается около гипотенузы. Определить поверхность тела вращения.

Ответ. $S = 2\pi h^2 \sqrt{2} \cdot \frac{\cos(45° - \alpha)}{\sin 2\alpha}$.

274. Через точку, взятую на поверхности шара радиуса R, проведена плоскость, касательная к шару, и под углом α к этой плоскости проведена плоскость, секущая шар. Определить площадь сечения.

Ответ. $\pi R^2 \sin^2\alpha$.

276. Дуга, величина которой равна α, а радиус равен R, вращается около диаметра $2R$, не пересекающего эту дугу и наклоненного к ее хорде под углом φ. Определить поверхность, описанную дугой при ее вращении на полный оборот вокруг диаметра.

Ответ. $4\pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi$.

277. В шар радиуса R вписан конус с углом α при вершине в осевом сечении конуса. Определить объем и полную поверхность конуса.

Ответ. $V = \frac{1}{3}\pi R^3 \sin^3\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $S = 2\pi R^2 \frac{\sin^2\alpha\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

278. Через вершину A равностороннего треугольника ABC со стороной a проведен к его плоскости перпендикуляр. Взятая на перпендикуляре точка S соединена с двумя остальными вершинами треугольника; получилась пирамида $SABC$. Грань BSC образует с плоскостью основания ABC двугранный угол φ. Определить боковую поверхность пирамиды $SABC$.

Ответ. $S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}-15^\circ\right)}{\cos\varphi}$.

279. В прямом параллелепипеде острый угол основания равен α. Одна из сторон основания равна a; сечение, проведенное через эту сторону и противоположное ей ребро, имеет площадь Q и образует с основанием угол β. Определить другую сторону основания.

Ответ. $\frac{Q\cos\beta}{a\sin\alpha}$.

280. Плоскость проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол α. Определить боковую поверхность призмы, если сторона основания равна a.

Ответ. $3a^2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

281. В основании пирамиды лежит треугольник с углами α и β. Высота пирамиды равна h. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить объем пирамиды.

Ответ. $V = \frac{2}{3}h^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}^2\varphi$.

282. Высота конуса равна H. Угол между высотой и образующей равен φ. Найти площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α.

Ответ. $\frac{1}{2}H^2\frac{\sin\alpha}{\cos^2\varphi}$.

282. Около шара радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет угол β ($\beta < 90°$) с плоскостью большего основания усеченного конуса. Определить объем и боковую поверхность усеченного конуса.

Ответ. $V = \frac{2\pi R^3}{3}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)$,

$$S_{\text{бок}} = 4\pi R^2 \operatorname{cosec}^2\beta.$$

283. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен φ. Определить высоту пирамиды.

Ответ. $H = \frac{2R\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

284. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол β. Определить боковую поверхность и объем пирамиды.

Ответ. $S_{\text{бок}} = \frac{nR^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$;

$$V = nR^3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}.$$

285. В конус, образующая которого составляет угол β с плоскостью основания, вписан шар. Определить, в каком отношении окружность касания делит боковую поверхность конуса и поверхность вписанного шара.

Ответ. Для конуса: $\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cosec}\beta\right)^2 - 1$; для шара: $\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$.

286. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, одна из равных сторон которого равна b и угол при вершине α. Найти объем призмы, если боковая поверхность равна удвоенной площади основания.

Ответ. $\frac{b^3}{2}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$.

287. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в последнюю — цилиндр. Найти отношение объемов обоих цилиндров.

Ответ. 4.

288. Прямой круговой цилиндр пересекается плоскостью непараллельно основанию. Доказать, что объем отсеченной части равен $\pi R^2 \cdot OO_1$, где OO_1 ось непараллельно усеченного цилиндра.

289. Вершина конуса с радиусом основания r находится в центре шара. Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ. Поверхность шара делит объем конуса на две равные части. Найти объем шара.

Ответ. $V = \dfrac{\pi r^3 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{6\sin^2\frac{\varphi}{4}}$.

290. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны каждое a; угол основания между равными сторонами α. Найти объем пирамиды.

Ответ. $V = \dfrac{a^3}{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

291. Около конуса описана треугольная пирамида, в основании которой лежит треугольник с углами α и $90^\circ - \alpha$. Найти объем пирамиды, если радиус основания конуса R и угол между образующей и плоскостью основания β.

Ответ. $\dfrac{R^3}{3}\operatorname{Stg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\beta$.

292. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды S; плоский угол при вершине α. Найти объем.

Ответ. $\dfrac{1}{6}S\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$.

293. Два конуса имеют общую ось и основания их лежат в одной плоскости; разность радиусов оснований равна m. Образующая одного конуса наклонена к основанию под углом α, а образующая другого — под углом β. Найти объем тела, заключенного между их боковыми поверхностями.

Ответ. $\dfrac{1}{3}\pi m^3 \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}^2(\beta-\alpha)$.

294. Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость отсекающая от окружности основания дугу α; расстояние плоскости от центра основания a. Найти объем конуса.

Ответ. $\dfrac{2}{3}\pi a^3 \operatorname{cosec} 2\varphi \operatorname{cosec}\varphi \sec^2\dfrac{\alpha}{2}$.

295. Полная поверхность конуса S, а образующая наклонена к основанию под углом α. Найти объем конуса.

Ответ. $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sec\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}S^3\cos\alpha}$.

296. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды α, α и β; боковое ребро a, общая сторона равных углов перпендикулярна к основанию. Найти объем пирамиды.

Ответ. $\frac{1}{3} a^3 \sin\frac{\beta}{2} \sec^2\alpha \sqrt{\sin\frac{2\alpha+\beta}{2} \sin\frac{2\alpha-\beta}{2}}$.

297. Треугольник со стороной a и прилежащими углами β и γ служит основанием прямой призмы; через сторону a под углом α к основанию проведена плоскость, пересекающая противоположное ребро. Определить площадь сечения и объем части, заключенной между сечением и основанием.

Ответ. $S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha}$;

$$V = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{\sin^2\beta \sin^2\gamma \operatorname{tg}\alpha}{\sin^2(\beta+\gamma)}.$$

298. Боковые ребра треугольной пирамиды с прямоугольным треугольником в основании наклонены к основанию под одним и тем же углом. Высота пирамиды H, два меньших плоских угла при вершине α и β. Найти объем пирамиды.

Ответ. $\frac{2H^3 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{3\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

299. Прямоугольник, площадь которого Q и угол между диагоналями α, вращается около прямой проходящей через вершину прямоугольника параллельно его диагонали. Определить объем и поверхность тела вращения.

Ответ. $V = \pi Q \sqrt{2Q \sin\alpha}$; $S = 4\pi Q \sqrt{2} \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$.

300. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $\alpha = 30°$ и заключен между сторонами, равными каждая 1 *м*. Треугольник вращается около оси, перпендикулярной боковой стороне и проходящей через вершину треугольника. Вычислить поверхность, образуемую основанием треугольника.

Ответ. $\pi \cos 15°$.

301. Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого a и угол при основании α, вращается около прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно биссектрисе угла α. Найти объем и поверхность тела вращения.

Ответ. $V = \frac{2}{3}\pi a^3 \sin\alpha \sin 2\alpha \cos\frac{\alpha}{2}$;

$$S = 8\pi a^2 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{60°+\alpha}{2} \cos\frac{60°-\alpha}{2}.$$

302. Основанием треугольной пирамиды служит треугольник со сторонами a, b и c. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом α. Определить радиус шара, описанного около пирамиды.

Ответ. $\dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\sin 2\alpha}$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

303. Площадь равнобедренного треугольника S, угол при вершине его α. Треугольник вращается около оси, проходящей через вершину угла при основании, параллельно высоте треугольника. Найти поверхность тела вращения.

Ответ. $4\pi S\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)$.

304. В шаре по одну сторону от центра проведены два сечения на расстоянии d друг от друга. Площади сечений равны Q_1 и Q_2. Найти радиус шара.

Ответ. $R^2=\dfrac{Q_2}{\pi}+\dfrac{\left(\dfrac{Q_2}{\pi}-\dfrac{Q_1}{\pi}-d^2\right)^2}{4d^2}=\dfrac{Q_2}{\pi}+\dfrac{(Q_2-Q_1-\pi d^2)^2}{4\pi^2d^2}$.

305. Конус и полушар имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Площадь сечения, заключенная между поверхностями конуса и полушара, равна половине площади основания. Доказать.

306. Радиус шара R. На расстоянии l от центра ($l>R$) взята точка A, из нее проведены к шару n касательных прямых, равномерно распределенных вдоль окружности касания. Найти расстояния между точками касания и угол α между касательными.

Ответ. $\dfrac{2R}{l}\sqrt{l^2-R^2}\sin\dfrac{180^\circ}{n}$; $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{R}{l}\sin\dfrac{180^\circ}{n}$.

307. Около правильной треугольной пирамиды описан шар радиуса R. Центр шара находится внутри пирамиды. Угол между основанием пирамиды и радиусом шара, проведенным в вершину основания пирамиды, равен α. Найти объем пирамиды.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^3\cos^2\alpha\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

308. В конус, радиус основания которого r и угол между образующей и основанием α, вписан шар. Найти длину линии касания шара и конуса.

Ответ. $4\pi r\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

309. Радиусы оснований цилиндра и конуса и радиус шара равны r; высоты цилиндра и конуса равны $2r$. Найти отношение объемов этих тел (конуса, шара, цилиндра).

Ответ. 1 : 2 : 3.

310. Основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат, вписанный в основание шарового сегмента. Высоты пирамиды и сегмента совпадают. Найти боковую поверхность пирамиды, если даны: радиус шара R и высота сегмента h.

Ответ. $4\sqrt{\frac{2R-h}{2R+h}}$.

311. Две правильные четырехугольные пирамиды имеют общее основание и вершины их лежат по одну сторону основания. Боковые грани пирамид наклонены к основанию под углами α и β. Расстояние между центрами шаров, вписанных в эти пирамиды, d. Найти объем тела, заключенного между боковыми поверхностями пирамид.

Ответ. $\frac{8d^3}{3}\cdot\frac{\cos^3\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\beta\cos\alpha}$.

312. Наибольший угол между образующими конуса α. В конус вписаны два шара, касающиеся друг друга и боковой поверхности конуса. Отрезок образующей конуса, заключенный между линиями касания шаров с поверхностью конуса, равен m. Найти объемы шаров.

Ответ. $\frac{1}{6}\pi m^3\operatorname{ctg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$; $\frac{1}{6}\pi m^3\operatorname{tg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$.

313. Центральный угол в осевом сечении сферического сектора равен α. Найти объем сектора, если объем шара, которому принадлежит сектор, равен V.

Ответ. $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

314. Дуга кругового сектора α стягивается хордой a. Определить объем шарового сектора, получаемого при вращении сектора около прямой, проходящей через центр и отстоящей от середины хорды на расстоянии b.

Ответ. $\frac{2}{3}\pi a^2 b\operatorname{cosec}\alpha$.

Показать справедливость равенств:

1. $\sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.
2. $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0$.
3. $\sec^2\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$.
4. $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1$.
5. $\sin\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) + \cos\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha$.
6. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\sec\alpha - 1}{\sec\alpha} = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$.

Выразить через $\sin\alpha$ следующие выражения:

7. $\sin\alpha\cos^2\alpha + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.
8. $\operatorname{cosec}\alpha\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.
9. $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{cosec}^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$.
10. $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Выразить через $\cos\alpha$ следующие выражения:

11. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.
12. $\sec\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.
13. $\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Выразить через $\operatorname{tg}\alpha$:

14. $\operatorname{ctg}\alpha + \sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$.
15. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) + \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)$.
16. $\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$.
17. $\dfrac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$.

Показать справедливость равенств:

18. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \sec\alpha}$.
19. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\operatorname{tg}2\alpha$.
20. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60° + \alpha) - \operatorname{tg}(60° - \alpha) = 3\operatorname{tg}3\alpha$.
21. $\sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2\beta + 2\sin(\alpha - \beta)\sin\beta = \sin^2\alpha$.
22. $\cos^4 22{,}5° + \cos^4\dfrac{3}{8}\pi + \cos^4\dfrac{5}{8}\pi + \cos^4\dfrac{7}{8}\pi = \dfrac{3}{2}$.

23. $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}=\sin 4\alpha.$

24. $\sin 75^\circ-\sin 45^\circ=\cos 75^\circ.$

25. $\dfrac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

26. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0.$

27. $\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma).$

28. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha.$

29. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha.$

30. $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

31. $\sec 72^\circ-\sec 36^\circ=\sec 60^\circ.$

32. $\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ-\alpha)+\cos^2(60^\circ+\alpha)=\dfrac{3}{2}.$

33. $\dfrac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}=\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha).$

34. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)=1.$

35. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta.$

36. $\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)=-\sin 2\alpha\sin 2\beta.$

37. $\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)=\dfrac{4\sin 2\alpha\sin 2\beta}{(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)^2}.$

38. $\dfrac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$

39. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha.$

40. $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin 2\alpha.$

41. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$

42. $\dfrac{\sin\dfrac{2}{3}\alpha+\sin\dfrac{4}{3}\alpha}{\cos\dfrac{2}{3}\alpha+\cos\dfrac{4}{3}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

43. $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1.$

44. $\sqrt{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2} = \sqrt{2}\sec\alpha.$

45. $\sqrt{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{ctg}\alpha)^2} = \sqrt{2}\operatorname{cosec}\alpha.$

46. $\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha.$

47. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\sin\alpha.$

48. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2} = \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha.$

49. $\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)\operatorname{tg}^2(1{,}5\pi+\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-2\pi) = \sin^2\alpha.$

50. $2 - \sec^2\alpha = \cos 2\alpha \sec^2\alpha.$

51. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$

52. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha.$

53. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}.$

54. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}.$

55. $1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

56. $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha).$

57. $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \sin 3\alpha.$

58. $4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \cos 3\alpha.$

59. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$

60. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta = 1.$

61. $2\left(\dfrac{1}{\sin 2\alpha} + \operatorname{ctg} 2\alpha\right) = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.$

62. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 0.$

63. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 1 + \cos\alpha.$

64. $\sin\frac{3}{2}\alpha \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3}{2}\alpha \sec\frac{\alpha}{2} = 2.$

65. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

66. $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$

67. $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha.$

68. $2 - \sec^2\alpha = \cos 2\alpha \sec^2\alpha.$

69. $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)}} + \right.$

$\left. + \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}}\right] = 1.$

70. $\sin^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1) = \left(\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2.$

71. $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{4}.$

72. $\cos^2\alpha(1-2\cos 2\alpha)^2 + \sin^2\alpha(1+2\cos 2\alpha)^2 = 1.$

73. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

74. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$

75. $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha\cos 32\alpha = \frac{\sin 64\alpha}{64\sin\alpha}.$

76. $\frac{\left(\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$

77. $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$

78. $\frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2 3\alpha}{\cos\alpha} = 8\cos 2\alpha.$

79. $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

80. $\frac{2\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$

81. $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}.$

82. $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha.$

83. $1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$

84. $3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha.$

85. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin 4\alpha}.$

86. $\dfrac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\,(\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)} \cdot \dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha} = \sin\alpha.$

87. $\dfrac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha.$

88. $\dfrac{3}{32}\sin 2\alpha - \dfrac{1}{32}\sin 6\alpha = \sin^3\alpha - \cos^3\alpha.$

89. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\alpha}.$

90. $\sin^3\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha.$

91. $\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta = 1.$

92. $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

93. $\dfrac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\,(\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha)} \cdot \dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha} = \sin\alpha.$

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

94. $\sin\alpha\sin^2(45^\circ + \alpha) + \sin^2(45^\circ - \alpha)\sin\alpha.$

Ответ. $\sin\alpha.$

95. $1 - \cos 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 3\alpha\sin 2\alpha.$

Ответ. $2\sin^2\dfrac{5}{2}\alpha.$

96. $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta.$

Ответ. $\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$

97. $\sin\alpha\sin 7\alpha - \sin 3\alpha\sin 5\alpha.$

Ответ. $-\sin 4\alpha\sin 2\alpha.$

98. $1 - \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta).$

Ответ. $\cos 2\beta\cos 2\alpha.$

99. $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1.$

Ответ. $2\cos\dfrac{3}{2}\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}.$

100. $\operatorname{cosec}\alpha + \sec\alpha$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha \sin\alpha}$.

101. $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$.
Ответ. $-4\sin\alpha \sin 2\alpha \cos 5\alpha$.

102. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Ответ. $\dfrac{2\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$.

103. $\dfrac{1 + \sin(\alpha - \beta)}{1 - \sin(\alpha - \beta)}$.

Ответ. $\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$.

104. $\cos 3\alpha + \sin 3\alpha \operatorname{tg} 4\alpha$.

Ответ. $\dfrac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$.

105. $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.
Ответ. $\operatorname{ctg}\alpha$.
106. $\sin 2\alpha \cos\beta + 2\cos^2\alpha \sin\beta$.
Ответ. $2\cos\alpha \sin(\alpha + \beta)$.
107. $\sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2\cos^2\alpha \sin 3\alpha$.
Ответ. $-2\cos\alpha \sin 2\alpha$.

108. $\sin\alpha\cos\beta + 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\beta$.

Ответ. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)$.

109. $\sin 2\alpha \cos\beta + 2\sin^2\alpha \sin\beta$.
Ответ. $2\sin\alpha\cos(\alpha - \beta)$.
110. $\sin 2\alpha \cos 3\alpha + 2\sin^2\alpha \sin 3\alpha$.
Ответ. $2\sin\alpha \cos 2\alpha$.

111. $\sin\alpha\cos\beta + 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\beta$.

Ответ. $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \beta\right)$.

112. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha$.
Ответ. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$.
113. $\operatorname{tg} 47^\circ - \operatorname{tg} 21^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ$.
Ответ. $\operatorname{tg} 21^\circ \operatorname{tg} 26^\circ \operatorname{tg} 47^\circ$.

114. $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$.

Ответ. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ$.

115. $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 35^\circ$.

Ответ. $\dfrac{\sin 65^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 35^\circ}$.

116. $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{tg} 18^\circ + \cos 16^\circ \operatorname{tg} 18^\circ$.

Ответ. $\dfrac{2 \cos 12^\circ \sin 46^\circ}{\cos 18^\circ}$.

117. $\sin 25^\circ + \sin 17^\circ + \cos 25^\circ \operatorname{tg} 4^\circ + \cos 17^\circ \operatorname{tg} 4^\circ$.

Ответ. $2 \sin 25^\circ$.

118. $\sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ. $\dfrac{2 \sin \frac{7}{2} \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

119. $\sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos 3\alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

Ответ. $\dfrac{\sin \frac{3}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

120. $\sin \alpha - \sin \beta - \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma + \cos \beta \operatorname{tg} \gamma$.

Ответ. $\dfrac{2 \cos \left(\gamma - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \gamma}$.

121. $\sin \alpha - \sin \beta - \cos \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \cos \beta \operatorname{ctg} \gamma$.

Ответ. $-\dfrac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\sin \gamma}$.

122. $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ - \sqrt{3} \cos 40^\circ - \sqrt{3} \cos 16^\circ$.

Ответ. $-4 \cos 12^\circ \sin 32^\circ$.

123. $\sin 42^\circ - \cos 42^\circ \operatorname{tg} 14^\circ + \cos 26^\circ - \sin 26^\circ \operatorname{tg} 14^\circ$.

Ответ. $-\dfrac{2 \cos 11^\circ \sin 39^\circ}{\cos 14^\circ}$.

124. $\sin 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha - \sin 3\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha$.

Ответ. $-\dfrac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin 4\alpha}$.

125. $\sin 25^\circ - \cos 32^\circ + \sqrt{3}\cos 25^\circ - \sqrt{3}\sin 32^\circ$.

Ответ. $\sin 11^\circ 30' \sin 16^\circ 30'$.

126. Выразить $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$.

127. Дано $\sin(2\alpha+\beta) = 2\sin\beta$. Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 3\operatorname{tg}\alpha$.

128. Вычислить выражение $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Ответ. $\dfrac{3}{2}$.

129. Показать, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ есть корень уравнения $x^2 - \dfrac{2x}{\sin\alpha} + 1 = 0$, и определить другой его корень.

130. Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha + \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$.

Ответ. $b^2 + b - 2$.

131. Вычислить $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Ответ. $3;\ -\dfrac{1}{3}$.

132. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 5$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = 3$.

Ответ. $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{4}{7}$; $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{1}{8}$.

133. Найти $\cos(70^\circ+\alpha)$, если $\sin(40^\circ+\alpha) = b$ и $0 < \alpha < 45^\circ$.

Ответ. $\cos(70^\circ+\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-b^2} - \dfrac{b}{2}$.

134. Дано $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = 4$. Найти $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

135. Найти $\cos(\alpha+\beta)$, если α и β удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\sin\alpha + \sin\beta = a,\\ \cos\alpha + \cos\beta = b.\end{cases}$$

Ответ. $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$.

136. $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Не находя $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, вычислить величину выражения $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

Ответ. 3.

137. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$. Не находя синусов и косинусов углов α и β вычислить $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$.

Ответ. $5 + 2\sqrt{6}$.

138. Вычислить выражение $\sin^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = m$.

Ответ. $\dfrac{m(1-m^2)^{3/2} - 1}{m(1-m^2)^{1/2}}$.

139. Вычислить выражение $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответ. $\dfrac{39 + 19\sqrt{2}}{47}$.

140. Вычислить выражение $\dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = m$.

Ответ. $\dfrac{(2-m)(2m+1)}{(2+m)(2m-1)}$.

140. Показать, что если α и β связаны соотношением $\dfrac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)} = \dfrac{n}{m}$, то имеет место пропорция $\dfrac{1 + \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}$.

141. Найти $\operatorname{tg}^2 x$, если

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Ответ. 1; 3.

142. Найти $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \operatorname{tg} 2\alpha + 7$.

Ответ. $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{7}$.

Исключить α и β из систем уравнений:

143. $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = m, \\ \sin\alpha\cos\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $m^2 = 1 + 2n$.

144. $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m, \\ \sin\alpha - \cos\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $m(1 - n^2) = 2$.

145. $\begin{cases} \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = m, \\ \operatorname{tg}\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $m^2n^2 = (n+1)^2(n^2+1)$.

146. $\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x, \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$

Ответ. $x + 2 = y^2$.

147. $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin 2\alpha. \end{cases}$

Ответ. $x^2 = 1 + y$.

148. $\begin{cases} x = \sin\alpha, \\ y = \cos 2\alpha. \end{cases}$

Ответ. $2x^2 + y = 1$.

149. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha, \\ y = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha. \end{cases}$

Ответ. $x(x + 2y) = -4$.

150. $\begin{cases} a\operatorname{ctg}\alpha = m, \\ b\sin 2\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $\frac{2ma}{a^2+m^2} = \frac{n}{b}$.

151. $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = a, \\ \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = b. \end{cases}$

Ответ. $a^3 - 3a + 2b = 0$.

152. $\begin{cases} x = 2a\cos\alpha - a\cos 2\alpha, \\ y = 2a\sin\alpha - a\sin 2a. \end{cases}$

153. $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin 3\alpha + \cos 3\alpha. \end{cases}$

Ответ. $x^2 - y^2 = 2(x^2 - 1)(2x^2 - 4x + 1)$.

154. $\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = m, \\ \cos\alpha + \cos\beta = n, \\ \cos(\alpha - \beta) = p. \end{cases}$

Ответ. $m^2 + n^2 - 2p = 2$.

155. $\begin{cases} (m\sin\alpha - n\cos\alpha)^2 = m^2 + n^2, \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} = \dfrac{1}{m^2+n^2}. \end{cases}$

Ответ. $\dfrac{m^2}{b^2} + \dfrac{n^2}{a^2} = 1.$

156. $\begin{cases} \dfrac{m}{a} = \dfrac{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}, \\ \dfrac{2b}{n} = \sec^2\alpha + \cos^2\alpha. \end{cases}$

Ответ. $\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} = 1.$

157. $\begin{cases} \sin\alpha = m, \\ \cos 4\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $m^2 + \dfrac{1-n}{4m^2} = 1.$

158. $\begin{cases} 1 + \sin\alpha = 4a\operatorname{tg}\alpha, \\ 1 - \sin\alpha = 4b\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$

Ответ. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2 + 4(a-b)^2 = 1.$

159. $\begin{cases} a\operatorname{tg}\alpha = m, \\ b\cos 2\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $\dfrac{n}{b} = \dfrac{a^2-m^2}{a^2+m^2}.$

160. $\begin{cases} \sin\alpha = m, \\ \sin\dfrac{1}{2}\alpha = n. \end{cases}$

Ответ. $\dfrac{m^2}{4n^2} + n^2 = 1.$

Определить:

161. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\sin\beta = 0{,}3\sqrt{10}$.

Ответ. $-\dfrac{1}{7}$.

162. $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Ответ. $\dfrac{7}{24}$.

163. $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{n}{m}$.

Ответ. $\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

164. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = -3\frac{3}{7}$.

Ответ. $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{5}$.

165. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Ответ. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\frac{2}{5}\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}$.

166. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $\sin x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Ответ. $\frac{a-b}{a+b}$.

167. $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$, если $\sin\frac{x}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Ответ. $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{4}$.

Решить уравнения:

168. $4\sin x = 3\cos x$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

169. $2\sin x - 5\cos x = 0$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = 2{,}5$.

170. $5\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

171. $3\cos^2 x - 4\sin^2 x = 0$.

Ответ. $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

172. $9\cos^2 x - 3\sin^2 x = 4$.

Ответ. $\cos x = \pm\sqrt{\frac{7}{12}}$.

173. $2\sin^2 x + 8\cos^2 x = 5.$

Ответ. $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

174. $5\cos^2 x - 4\sin^2 x = 3.$

Ответ. $\cos x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}.$

175. $a\sin^2 x - b\cos^2 x = 0.$

Ответ. $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$

176. $a\cos^2 x - b\sin^2 x = 0.$

Ответ. $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}.$

177. $5\sec^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x = 6.$

Ответ. $\cos x = \pm \sqrt{\frac{7}{8}}.$

178. $2\sec^2 x - 3\operatorname{tg}^2 x = 1.$

Ответ. $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

179. $a\sec^2 x + b\operatorname{tg}^2 x = c.$

Ответ. $\cos x = \pm \sqrt{\frac{b+a}{b+c}}.$

180. $\cos^2 x - 8\cos x \sin x - 20\sin^2 x = 0.$
Ответ. $\operatorname{ctg} x_1 = 10; \operatorname{ctg} x_2 = -2.$
181. $\sin^2 x + 12\cos^2 x - 7\sin x \cos x = 0.$
Ответ. $\operatorname{tg} x_1 = 4; \operatorname{tg} x_2 = 3.$
182. $5\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0.$

Ответ. $\operatorname{tg} x_1 = 1; \operatorname{tg} x_2 = \frac{3}{5}.$

183. $7\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Ответ. $\operatorname{tg} x_1 = 1; \operatorname{tg} x_2 = \frac{3}{5}.$

184. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}.$

Ответ. $\sin x_1 = \pm \sqrt{\frac{5}{6}}; \quad \sin x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{6}}.$

185. $\frac{\sin x \sec x}{\operatorname{tg} x} = 25 \cos x.$

Ответ. $\cos x = 0{,}04.$

186. $(\sec^2 x - 1)(\operatorname{cosec}^2 x - 1) = 2 \operatorname{tg} x.$

Ответ. $\operatorname{tg} x = 0{,}5.$

187. $\sin (x - 60°) = \cos (x + 30°).$

Ответ. $x = k\pi + \frac{\pi}{3}.$

188. $\frac{(\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x}{\cos^4 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x} = 2.$

Ответ. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$

189. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{2} \sin^2 2x = 0.$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$

190. $\sin 3x \cos 5x = \cos 2\lambda - \cos 3x \sin 5x.$

Ответ. $x_1 = \frac{2}{3} k\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{20}.$

191. $8 \sin x \cos 2x \cos x = \sqrt{3}.$

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$

192. $\sqrt{2} \cos 2x = \cos x + \sin x.$

Ответ. $x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{2}{3} k\pi - \frac{\pi}{12}.$

193. $\sec^2 \frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} = 16 \operatorname{c tg} x.$

Ответ. $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}.$

194. $4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 3 \sin 2x.$

Ответ. $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = k\pi + \operatorname{arctg} 2.$

195. $\sin x \sin (x + 60°) \sin (x + 120°) = \frac{1}{4}.$

Ответ. $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$

196. $(\sin 4x - 2\cos 4x)^2 + (\cos 4x - 2\sin 4x)^2 = 3$.

Ответ. $x_1 = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{48}$; $x_2 = \frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{48}$.

197. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

Ответ. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

198. $\cos 7x + \cos x = \cos 4x$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{8}(2k + 1)$; $x_2 = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$.

199. $\sec^2 x + 3\sec x \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec}^2 x = 4$.

Ответ. $x = \frac{k\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{12}$.

200. $(4 - \sqrt{3})(\sec x + \operatorname{cosec} x) = 4(\sin x \operatorname{tg} x + \cos x \operatorname{ctg} x)$.

Ответ. $x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

201. $8\sin x - \cos 2x \cos x = \sqrt{3}$.

Ответ. $x = \frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12}$.

202. $8\sin^3 x \cos x + \sin 4x = 1$.

Ответ. $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}$.

203. $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$.

Ответ. $x = \frac{k\pi}{4} - (-1)^k \frac{\pi}{8}$.

204. $\sin(x + 10^\circ) - \sin x = \sin 5^\circ$.
Ответ. $x = 360^\circ k \pm 60^\circ - 5^\circ$.

205. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

Ответ. $x_1 = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$.

206. $\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \operatorname{cosec} x = 5$.

Ответ. $x_1 = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $x_2 = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

207. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Ответ. $x = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{3}$.

208. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

Ответ. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

209. $2 \sec x \operatorname{cosec} x + 2 \operatorname{cosec} x - 5 = 2 \sec x$.

Ответ. $x_1 = 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2k\pi$,
$x_2 = 2 \operatorname{arctg}(-2) + 2k\pi$.

210. $2\cos x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$.

211. $\sin x \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$.

212. $\cos x - \sec x = \sin x \operatorname{tg} x$.
Ответ. $x = k\pi$.
213. $\cos x + \cos 2x = 2$.
Ответ. $x = 2k\pi$.
214. $\sec\frac{x}{2} \operatorname{cosec}\frac{x}{2} = 2$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

215. $\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{tg} 2x = 2$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$.

216. $4 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 1$.

Ответ. $x = k\pi \pm \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

217. $\operatorname{ctg} x = 2\cos x$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$; $x_2 = \frac{\pi}{6}(12k + 1)$.

$x_3 = \frac{\pi}{6}(12k + 5)$.

218. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

219. $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.

220. $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Ответ. Нет решений.

221. $\cos 4x - \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_3 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$.

222. $4^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{2}$.

Ответ. $x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

223. $8^{\operatorname{tg} x} = 4^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Ответ. $x = 2k\pi$.

224. $4^{\cos(\alpha - x)} = \sqrt[\cos\alpha]{2^{\cos x}}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1) + 2\alpha$.

225. $3^{\log \operatorname{tg} x} + 3^{\log \operatorname{ctg} x} = 2$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$.

226. $8^{1-\sin x+\sin^2 x-\sin^3 x+\cdots} = 4$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{6}(6k+1)$; $x_2 = \frac{\pi}{6}(6k+5)$.

227. $\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 7x = 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{24}(4k+1)$.

228. $\operatorname{tg} 5x = -\operatorname{tg} 11x$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{16} k$.

229. $\operatorname{ctg}(\pi - 3x) = \operatorname{tg}(\pi - x)$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{8}(2k + 1)$.

Решить системы тригонометрических уравнений:

230. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0{,}5, \\ \sin x - \sin y = 0{,}3. \end{cases}$

Ответ. $\sin x = 0{,}4$; $\sin y = 0{,}1$.

231. $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x - \sin y = b. \end{cases}$

Ответ. $\sin x = \frac{a+b}{2}$; $\sin y = \frac{a-b}{2}$.

232. $\begin{cases} 3\sin x + 8\cos y = 3, \\ \frac{15}{\operatorname{cosec} x} - \frac{4}{\sec y} = 4. \end{cases}$

Ответ. $\sin x = \frac{1}{3}$; $\cos y = \frac{1}{4}$.

233. $\begin{cases} 81\operatorname{tg} y - 6\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 35, \\ 13\operatorname{ctg} x + 25\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 9. \end{cases}$

Ответ. $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$; $\operatorname{tg} y = \frac{5}{16}$.

234. $\begin{cases} 1{,}25\sin x + 0{,}2\operatorname{tg} y = 2, \\ 20\sin x + 125\operatorname{tg} y = 641. \end{cases}$

Ответ. $\sin x = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} y = 5$.

235. $\begin{cases} 3\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 8\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg} y, \\ 4\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 15\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg} y. \end{cases}$

Ответ. $\operatorname{tg} x = 3$; $\operatorname{tg} y = 4$.

236. $\begin{cases} \sin(x - \pi) - \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}5, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(y + \pi) = -0{,}3. \end{cases}$

Ответ. $\sin x = 0{,}4$; $\sin y = 0{,}1$.

237. $\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}(\pi + y) = 5, \\ \operatorname{tg}(x - \pi) + \operatorname{ctg}\left(y + \frac{3\pi}{2}\right) = 3. \end{cases}$

Ответ. $\operatorname{tg} x = 4;\ \operatorname{tg} y = 1.$

238. $\begin{cases} 4\sin(y - 2\pi)\operatorname{cosec}(x - \pi) - 3\operatorname{cosec}(x + \pi) = 4, \\ 7\sec\left(y + \frac{3\pi}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sec\left(y - \frac{3\pi}{2}\right) = 20. \end{cases}$

Ответ. $\sin x = \frac{1}{2};\quad \sin y = \frac{1}{4}.$

239. $\begin{cases} \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4};\ y = \frac{\pi}{12}.$

240. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1{,}5, \\ x - y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Ответ. $x = \frac{\pi}{3};\quad y = 0.$

241. $\begin{cases} x + y = \frac{5}{6}\pi, \\ \sin x + \sin y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2};\ y = \frac{\pi}{3}.$

242. $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ 2\sin x \cdot \cos y = 1. \end{cases}$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4};\quad y = -\frac{\pi}{4}.$

243. $x + y = \frac{\pi}{6}.$

$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{6};\ y = \frac{\pi}{3}.$

244. $\begin{cases} x+y=\frac{5}{4}\pi, \\ \sin x+\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}$; $y=\pi$.

245. $\begin{cases} x+y=-\frac{7}{12}\pi, \\ \operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=1+\sqrt{3}. \end{cases}$

Ответ. $x=-\frac{\pi}{4}$; $y=-\frac{\pi}{3}$.

246. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=1. \end{cases}$

Ответ. $x=y=\frac{\pi}{4}$.

247. $\begin{cases} x+y=\pi, \\ \cos^2 x+\cos^2 y=1. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}$; $y=\frac{3}{4}\pi$.

248. $\begin{cases} x+y=\frac{3}{4}\pi, \\ 2\sin x+\sqrt{2}\sin y=3. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{\pi}{4}$.

249. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x+\cos y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{2}{3}\pi$.

250. $\begin{cases} \sin x \cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Ответ. $x=-\frac{\pi}{3}$; $y=\frac{2}{3}\pi$.

251. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = -1, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = -1. \end{cases}$

Ответ. $x = -\dfrac{\pi}{3}$; $y = \dfrac{2}{3}\pi$.

252. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \sqrt{3}, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4}$; $y = -\dfrac{1}{3}$.

253. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Ответ. $x = 0$; $y = \dfrac{\pi}{6}$.

254. $\begin{cases} \sin(2x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+2y) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ. $x = y = \dfrac{\pi}{9}$.

Доказать, что для острого угла α выполняются неравенства:

255. $\sec\alpha > \operatorname{tg}\alpha$.

256. $\sin\alpha \leqslant \dfrac{1}{2\cos\alpha}$.

257. $\sin\alpha \leqslant \sqrt{2} - \cos\alpha$.

258. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant \sqrt{2}$.

Показать справедливость следующих равенств:

259. $\arcsin\dfrac{1}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

260. $\arcsin\dfrac{12}{13} = \operatorname{arcctg}\dfrac{5}{12}$.

261. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{13}$.

262. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{4}$.

263. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

264. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$.

265. $\sin 2(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$.

266. $\operatorname{tg}(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = x$, $|x| \leqslant 1$.

Решить уравнения:

267. $\operatorname{arctg}(1+x) + \operatorname{arctg}(1-x) = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $x = \pm\sqrt{2}$.

268. $\operatorname{arctg} x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Ответ. $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; $x_3 = 0$.

269. $\arccos(x-1) = 2\arccos x$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

270. $3\arcsin x - \pi = 0$.

Ответ. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

271. $(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x + 2 = 0$.

Ответ. $x = \sin\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

272. $4\operatorname{arctg} x - 6\operatorname{arcctg} x = \pi$.

Ответ. $x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$.

Владимир Федорович Ковалев

Практические занятия по математике для поступающих в вузы

Редактор *Кострица Ю. Е.*
Художник *Рынкевич П. И.*
Художественный редактор *Семендяев Ю. С.*
Технический редактор *Кохановская Т. И.*
Корректоры *Мирончак С. Д., Ромянова А. И., Головко О. А.*

Сдано в набор 11. IX. 1970 г. БФ 05785. Зак. № 2074. Изд. № 984. Формат бумаги $60\times84^{1}/_{16}$. Физич. печ. листов 19,75. Услов. печ. листов 19,61. Учетно-издат. листов 14,84. Бум. листов 9,875. Подписано к печати 18. XII. 1970 г. Бумага типограф. № 3. Тираж 100 000. Цена 74 коп.

Издательство Киевского университета, Киев, Героев революции, 4.
Т. П. — 1971, поз. 149.

Киевский полиграфический комбинат Комитета по печати при Совете Министров УССР, ул. Довженко, 3.